République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière
Département de mathématiques
Laboratoire des mathématiques appliquées et de modélisation

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN 3ème CYCLE

Domaine : Mathématiques et informatique. Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse non linéaire et modélisation

Présentée par

BAZINE Imane

Intitulée

Équations de transport dans la mécanique des fluides

Soutenue le : 13 /06/2019 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	**Grade**		
Mr BOUSSETILA Nadjib	**Prof.**	Univ. de Guelma	Président
Mr FUJITA YASHIMA Hisao	**Prof.**	E.N.S. de Constantine	Encadreur
Mr AIBECHE Aissa	**Prof.**	Univ. de Sétif	Examinateur
Mr HITTA Amara	**Prof.**	Univ. de Guelma	Examinateur
Mr DENCHE Mohamed	**Prof.**	Univ. de Constantine 1	Examinateur
Mme FRIOUI Assia	**MCA**	Univ. de Guelma	Examinateur

Année Universitaire 2018/2019.

Équations de transport dans la mécanique des fluides

Imane Bazine

Thèse de Doctorat en mathématiques

Université 8 Mai 1945 - Guelma

“La vie n’est bonne qu’à étudier et à enseigner les mathématiques.”

Blaise Pascal



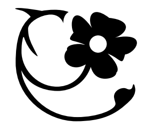
Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents,

Mes chères sœurs,

Toute ma famille,

Tous mes amis …



Remerciements

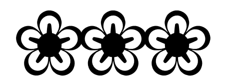
PAR ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse.

En premier lieu, je tiens à remercier spécialement mon directeur de thèse Prof. **Hisao FUJITA YASHIMA** pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant d'encadrer ce travail. Je le remercie également pour le temps et la patience qu'il m'a accordés tout au long de ces années.

Mes remerciements vont également au professeur **Davide ASCOLI** de l'université de Turin pour les discussions utiles eues avec lui et ses suggestions toujours avisées. Je tiens à exprimer ma vive gratitude au professeur **Paolo SECCHI** de l'université de Brescia, où j'ai passé une période de stage et eu reçu de lui des conseils très utiles pour la réalisation de notre travail de recherche.

Je ne manquerais pas non plus de dire un grand merci aux membres du jury : Prof. **Nadjib BOUSSETILA** le président, Prof. **Aissa AIBECHE**, Prof. **Amara HITTA**, Prof. **Mohamed DENCHE** et Dr. **Assia FRIOUI** les examinateurs, qui ont accepté d'évaluer cette thèse à sa juste valeur, et de me faire part de leurs remarques sûrement pertinentes qui contribueront au perfectionnement du présent travail.

Un très grand merci à tous mes collègues membres du laboratoire LMAM, pour leur soutien durant ce parcours doctoral.



مُلـخَّص

في هذه الأطروحة نقترح دراسة معَادلة النَّقل الخطيَّة (معَادلة تفَاضليَّة جُزِئيَّة من الدَّرجة الأولَى ذَات نمط زَائدي) مع إعطَاء شرط علَى الجزء الدَّاخل من حدود المجَال قيد الدِّرَاسة ،كمَا نهتمُّ بِإنشَاء مترَاجحة للحل في فضَاء سُبوليف W^1_∞ . بعد ذلك و بإستعمَال النَّتِجة السَّابقة نبرهن وجود و وحدَانية الحل المحلي لجملة معَادلَات شبه خطيَّة مستخرجة من نموذج يصِف حركة الهوَاء مع تغيُّرَات طبيعة المَاء. إضَافة إلَى هذَا، نقوم بتخفيف الشَّرط المُعطَى علَى شُعَاع السُّرعة في الجزء الدَّاخل من الحدود لِلحصول علَى مُترَاجحة شبيهة بتلك التي تحصَّلنَا عليهَا في نتيجة البحث الأَوَّل.

الكلمات المفتاحيَّة : معَادلة النَّقل، نموذج يصف حركة الهوَاء، طريقة المنحنيَات المميِّزة.

Abstract

In this thesis, the linear transport equation with the entry condition given on the entry part of the boundary is considered and an estimate of the solution in W^1_∞ is proved. Further, by using this result, the existence and the uniqueness of the local solution to a quasi-linear equation system arising from the modeling of the atmosphere with phase transition of water are proved. Moreover, the possibility of weakening the condition on the velocity field on the entry part of the boundary for obtaining an estimate similar to that of the first result is shown.

Key-words: Transport equation, entry condition, method of characteristics, model of atmospher.

Résumé

Dans la présente thèse, on considère l'équation de transport linéaire (équation aux dérivées partielles du premier ordre de type hyperbolique) avec la condition d'entrée donnée sur la partie entrante de la frontière et on démontre une estimation de la solution dans W^1_∞. De plus, en utilisant ce résultat, on démontre l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations quasi-linéaire issu d'un modèle décrivant le mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau. En outre, on affaiblit la condition sur le champ de vitesse sur la partie entrante de la frontière, pour l'obtention d'une estimation similaire à celle du premier résultat.

Mots-Clés : Équation de transport, condition d'entrée, méthode des caractéristiques, modèle pour l'atmosphère.

Table des matières

Introduction

Notes historiques sur l'équation de transport

EN 1890, en se basant sur la théorie développée par Lagrange et complétée par Cauchy et par Jacobi, Edouard Goursat a élaboré dans son ouvrage [GOU 21], une méthode à l'aide de laquelle on ramène l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à l'intégration d'un système d'équations différetielles ordinaires à une seule variable indépendante. En effet, on considère en particulier une équation à deux variables indépendantes

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y} = B \qquad (1)$$

où les coefficients A_1, A_2, B ne dépendent que des variables x et y et de la fonction inconnue z. L'équation (1) traduit le fait que le plan tangent à une surface intégrale $z(x, y)$ en un point (x, y, z) de cette surface contient la droite (D), passant par ce même point, et qui a pour équations

$$\frac{X-x}{A_1} = \frac{Y-y}{A_2} = \frac{Z-z}{B}.$$

Selon Goursat, une courbe caractéristique est une courbe de l'espace qui, en chacun de leurs points, est tangente à la droite (D) correspondante. De cette définition on peut

tirer la propriété :“*Toute surface intégrale est un lieu des courbes caractéristiques et inversement, toute surface engendrée par des courbes caractéristiques est une surface intégrale*”. Par conséquent, il a constaté alors que sur une caractéristique, les paramètres directeurs de la tangente dx, dy, dz, sont proportionnels aux coefficients A_1, A_2, B et ces courbes sont donc définies par le système d’équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{A_2} = \frac{dz}{B}.$$

Plus tard, en 1937, Courant et Hilbert ont consacré un chapitre tout entier dans leur fameux livre [COU 89] à la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre où ils donnent une description, de la méthode des caractéristiques, simillaire à celle de Goursat. Dans la période entre 1939 et 1969, les problèmes de transport ont été largement étudiés et cela bien sûr est motivé par les besoins de la technologie. C’est pourquoi l’équation de transport linéaire, à cette époque, paraît dans des domaines très variés ; elle provient principalement de la physique en particulier dans la neutronique ([DAV 57], [JOR 58], [REE 65], [ZWE 67]), le transfert radiatif ([CHA 50], [STE 67]), la physique des plasmas ([MON 64], [OBE 67]) et la mécanique des fluides ([SER 59], [HAR 67]).

Dès lors, un grand nombre de mathématiciens s’intéressait à l’étude de l’équation de transport dans ses différentes formes et ses multiples applications, citons par exemple [BAR 70], [BLO 70], [DIP 89], [AMB 04], [BOY 05], [CRI 14], [ASC 14].

Dans son travail [BAR 70], Bardos a examiné l’équation de transport avec la condition d’entrée sous des conditions suffisamment générales mais avec le champ de vitesse de transport v appartenant à la classe $\mathscr{C}^1$; il utilise en substance la méthode des caractéristiques, mais avec des "méthodes modernes"-analyse fonctionnelle et théorie des semi-groupes-.

Dans le cas où v est moins régulier (appartient à un espace de Sobolev par exemple), Diperna et Lions [DIP 89] ont introduit la théorie des solutions renormalisées à l’aide de laquelle ils ont démontré l’existence et l’unicité des solutions faibles dans L^∞ d’une

équation de transport de la forme suivante

$$\partial_t u - v \cdot \nabla u + cu = 0 \tag{2}$$

avec une donnée initiale dans L^∞. En effet, ils ont établi que toutes les solutions faibles de (2) sont des solutions renormalisées. Plus précisément, ils ont énoncé que pour toute fonction régulière β, la fonction $\beta(u)$ est une solution de l'équation de transport

$$\partial_t \beta(u) - v \cdot \nabla \beta(u) + cu\beta'(u) = 0.$$

Cette théorie a été étendue au cas d'un champ de vitesse appartient à l'espace des fonctions à variation totale bornée (BV) par Ambrosio [AMB 04], où il a traité la question de l'unicité des solutions faibles bornées du transport par un champ BV. On cite également le travail [CRI 14], dans le quel les auteurs ont étudié un problème aux limites pour une équation de continuité dans le cas d'un champ de vitesse borné, à divergence bornée et est dans $L^1_{loc}(0, T; BV)$.

Motivation physique et mathématique

La loi de la conservation, une des lois fondamentales de la mécanique des fluides, est exprimé par l'équation dite *équation de continuité*

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{3}$$

où ϱ est la densité du fluide en considération, tandis que $v = (v_1, v_2, v_3)$ est la vitesse avec laquelle le fluide se déplace. Cette équation peut être considérée comme prototype des équations de transport, en particulier de celles qui se considèrent dans un milieu fluide. En effet, si on considère une substance diffusée dans un fluide qui se déplace suivant son mouvement, comme une substance dissoute dans le fluide, la den-

sité de cette substance ψ vérifierait une équation du même type que (3)

$$\partial_t \psi + \nabla \cdot (\psi v) = 0.$$

Or, cette substance peut subir des réactions chimiques ou d'autre processus, qui peuvent provoquer la variation de la masse de cette substance. Donc souvent on devra considérer une équation du type

$$\partial_t \psi + \nabla \cdot (\psi v) = f(\psi, x, t), \tag{4}$$

où $f(\psi, x, t)$ est le terme de la variation de densité due au processus complémentaire. Naturellement, pour chaque substance et pour chaque problème spécifique, on devra préciser la forme de la fonction $f(\psi, x, t)$.

Par exemple, si on considère ce qui se passe dans l'atmosphère, on voit que la vapeur d'eau et les gouttelettes d'eau joueront le rôle principal pour la formation des nuages et la précipitation. La vapeur d'eau se déplace avec l'air, tandis que les gouttelettes d'eau se déplacent sous l'influence du mouvement de l'air ainsi que par la force gravitationnelle. La vapeur d'eau peut se transformer en eau liquide par le processus de condensation et former des gouttelettes et les gouttelettes d'eau peuvent être transformées en vapeur d'eau par l'évaporation. En outre, les gouttelettes peuvent subir le processus de coagulation entre elles. Ces circonstances nous conduisent à des équations du type (4) avec le terme de processus complémentaire $f(\psi, x, t)$ bien spécifique.

À titre d'exemple, nous citons la modélisation des phénomènes atmosphériques proposée dans [SEL 11]; nous allons aussi appliquer notre résultat "théorique" à ce modèle. Dans le modèle proposé dans [SEL 11], les auteurs ont cherché à décrire le mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau. On considère en effet un système de trois équations de conservation de la masse (de la forme (4)) pour : l'air sec, la vapeur d'eau et l'eau liquide contenue dans les gouttelettes. Par "air sec" on entend la partie de l'air consistant dans toutes les composantes sauf H_20; c'est-à-dire,

la partie composée par N_2, O_2, Ar, CO_2, etc. mais sans considérer H_2O. Pour l'air sec, la loi de la conservation de la masse est exprimée par l'équation de continuité (3), c'est-à-dire

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{5}$$

où ϱ est la densité de l'air sec, tandis que v désigne la vitesse de l'air. Pour la densité π de vapeur d'eau, si nous désignons par H_{gl} la quantité (par l'unité de volume et par l'unité de temps) de $H_2 0$ qui se transforme du gaz au liquide et par H_{gs} la quantité qui se transforme du gaz au solide, on aura l'équation

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl} - H_{gs}. \tag{6}$$

Si la température est supérieure à la température de fusion ($T > 0°$), on a $H_{gs} = 0$, de sorte que l'équation (6) se réduit à

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(\pi, \sigma). \tag{7}$$

D'autre part, en désignant par w la vitesse des gouttelettes d'eau et en considérant la condensation ou l'évaporation produite sur les gouttelettes représentée par la fonction h_{gl}, on donne l'équation pour la densité σ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma + \nabla \cdot (\sigma w) + \partial_m (m h_{gl} \sigma) - h_{gl} \sigma = \\ = -\sigma G_1(\pi; m) - m \int_0^\infty \beta(m, m') \sigma(m) \sigma(m') dm' + \\ + G_0(\pi, \sigma; m) + \frac{m}{2} \int_0^m \beta(m - m', m') \sigma(m') \sigma(m - m') dm', \end{aligned} \tag{8}$$

où $G_1(\pi; m)$ représente le taux de disparition de gouttelettes de masse m, $G_0(\pi, \sigma; m)$ est le taux de création de gouttelettes de masse m et $\beta(m, m')$ est la probabilité de rencontre entre une gouttelette de masse m et une de masse m'.

Du point de vue mathématique, si le champ de vitesse v est donné et jouit de la

régularité suffisante, les équations du type (4) avec un $f(\psi, x, t)$ suffisamment simple peuvent être résolues par la méthode classique des caractéristiques. C'est-à-dire, en définissant les caractéristiques γ par l'équation

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = v(t, \gamma(t)),$$

le long de chaque caractéristique γ, on transforme l'équation (4) en une équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt}\psi = -(\nabla \cdot v)\psi + f(\psi, \gamma, t). \tag{9}$$

La résolution de (9) donnera la résolution de (4).

Toutefois, dans les applications d'intérêt physique, on rencontre souvent le cas où la régularité de v (et des autres termes) est insuffisante pour appliquer directement la méthode des caractéristiques. Ainsi, nous sommes obligés à recourir à une construction de la solution plus complexe, pour laquelle l'étude de l'équation linéaire et l'estimation de sa solution sont fondamentales. Par exemple, la résolution du système d'équations non linéaires (5)-(8) se base sur l'étude des équations linéarisées, en particulier, les estimations utiles des solutions des équations linéarisées. Nous rappelons aussi que pour l'application aux équations non linéaires, on trouve souvent particulièrement utiles les estimations du gradient de la solution dans L^∞.

L'autre aspect important est la condition d'entrée. En effet, l'hypothèse de l'annulation de la composante normale de la vitesse v sur la frontière du domaine dans lequel on considère l'équation facilite le calcul et le raisonnement, comme les auteurs de [Asc 14] l'ont fait dans leur travail. La condition que la composante normale de la vitesse de transport sur la frontière du domaine considéré n'est pas nécessairement nulle, c'est-à-dire qu'il y a l'entrée et la sortie de la quantité représentée par la fonction inconnue de l'équation, pose des problèmes très délicats sur la condition d'entrée dans le voisinage des points où la composante normale de la vitesse de transport s'annule.

Ces motivations physiques et mathématiques nous ont ramenés à l'étude que nous

présentons dans la suite.

Plan de la thèse

Le plan de la présente thèse est le suivant : le premier chapitre présente le résultat de l'estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport linéaire avec la condition d'entrée. Ce résultat (voir [BAZ 18]) généralise le résultat de [ASC 14] au cas où la composante normale de la vitesse n'est pas nécessairement nulle. Plus précisément, nous allons considérer une équation de transport linéaire avec une condition d'entrée sur la partie entrante de la frontière et on établi une estimation de la solution dans la classe W^1_∞. Comme la condition de régularité du champ de vitesse n'est pas suffisante pour utiliser directement la méthode des caractéristiques, nous allons construire un problème approché en régularisant les coefficients de l'équation ainsi que les données initiale et d'entrée, mais cela se fait d'une manière particulière à cause de l'entrée. Ensuite, on établit des estimations des solutions approchées et en passant à la limite, on obtient le résultat cherché.

Dans le chapitre 2, nous présentons une application des résultats obtenus dans le chapitre précédent (voir la deuxième partie de [BAZ 18]). Plus précisément, en utilisant le résultat du cas linéaire, nous allons démontrer l'existence et l'unicité de la solution locale d'un système d'équations non linéaires avec l'entrée. C'est un sous-système du système d'équations du modèle de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau (ce modèle est proposé dans [SEL 11]).

Dans le chapitre 3, nous proposons d'affaiblir la condition technique posée dans le premier chapitre pour l'obtention de l'estimation. En effet, dans le premier résultat, on a posé une condition de la régularité du champ de vitesse dans le voisinage de la région où sa somposante normale s'annule. Pour affaiblir cette condition, nous proposons la régularisation des fonctions données par l'opérateur régularisant variable (qui dépend de la position x). Puis, nous démontrons que la mesure de la zone affectée par une régularisation particulère tend vers 0, quand le paramètre ε de l'opérateur rélgularisant

tend vers 0. Ceci nous permet d'obtenir un résultat analogue à celui du premier résultat sur l'estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport linéaire avec la condition d'entrée.

1

Estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport avec une condition d'entrée

1.1 Introduction

LE problème de l'existence et de l'unicité ainsi que de la régularité de la solution d'une équation de transport linéaire a été étudié par nombre de mathématiciens (voir par exemple [BAR 70], [DIP 89], [AMB 04] pour ne citer que quelqu'uns parmi les travaux les plus connus). Or, dans le cas où l'équation est envisagée avec

une condition d'entrée (donnée à la frontière du domaine), on trouve une problématique plus complexe, comme il a été évoqué par plusieurs auteurs [BAR 70], [SEC 98], [PLO 12], [CRI 14], [BOY 05]. Dans [PLO 12], les auteurs ont étudié en détail le problème pour l'équation de transport stationnaire avec des données d'entrée. En particulier, ils considèrent le problème de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cadre des espaces de Sobolev $W^s_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $0 < s \leq 1$; pour éviter l'irrégularité de la solution, ils imposent des conditions assez complexes dans le voisinage de la frontière. Plus récemment, la question de l'affaiblissement de la condition sous laquelle il existe une solution a été approfondie de manière fort accentuée. On cite par exemple le travail [AMB 04], dans lequel l'auteur considère une équation de transport dont le champ de vitesse appartient à l'espace des fonctions à variation totale bornée (BV). Plus tard, dans [CRI 14] les auteurs ont établi le caractère bien posé des problèmes aux limites pour les équations de continuité où le champ de vitesse est borné, à divergence bornée et est dans $L^1_{loc}(0, T; BV(\Omega_*; \mathbb{R}^n))$ pour tout ensemble ouvert et borné $\Omega_* \subseteq \Omega$. Or, la question de l'estimation du gradient de la solution n'a – semble-t-il – pas aussi attiré l'attention des mathématiciens dans les derniers temps. Mais nous constatons que, lorsqu'il s'agit des équations non linéaires, l'estimation du gradient de la solution de l'équation linéarisée est souvent la clé de la résolution du problème non linéaire.

Dans [ASC 14] les auteurs, en étudiant l'équation de transport linéaire, ont établi des estimations, y compris l'estimation dans L^∞ du gradient, de la solution. Or, dans [ASC 14] on a supposé que la composante normale de la vitesse (du flux representant le transport) s'annule sur la frontière du domaine dans lequel l'équation est considérée.

Dans le présent chapitre on va généraliser le résultat de [ASC 14] sur la norme dans L^∞ du gradient de la solution de l'équation de transport linéaire au cas où la composante normale de la vitesse n'est pas nécessairement nulle ; il s'agit donc du cas où il y a l'entrée et la sortie du domaine considéré. Nous allons utiliser les idées de [ASC 14], mais la présence de l'entrée nous conduit à une construction particulière d'équations approchées.

1.2 Position du problème linéaire

Dans ce chapitre, nous allons considérer une équation de transport linéaire dans un sous-ensemble ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Pour la frontière $\partial\Omega$ de Ω, nous supposons qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$, Ω étant d'un seul côté de $\partial\Omega$, et qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in \partial\Omega$, on ait

$$x - \varepsilon \vec{n}(x) \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{1.1}$$

où $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure unitaire à la frontière $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$ (dans la suite nous écrivons simplement n_x au lieu de $\vec{n}(x)$).

On considère une fonction v définie sur $[0,\infty[\times\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)), \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega)), \tag{1.3}$$

où $1 \leq q \leq \infty$.

La fonction v sera considérée comme le champ de vitesse qui définit le flux pour une équation de transport. Nous définissons, pour chaque $t \in [0,\infty[$, la partie d'entrée $\Gamma_-(t)$ et la partie de sortie $\Gamma_+(t)$ de la frontière $\partial\Omega$ par les relations

$$\Gamma_-(t) = \{x \in \partial\Omega \mid n_x \cdot v(t,x) < 0\}, \tag{1.4}$$

$$\Gamma_+(t) = \{x \in \partial\Omega \mid n_x \cdot v(t,x) > 0\}. \tag{1.5}$$

Dans $[0,\infty[\times\Omega$ nous allons considérer l'équation de transport linéaire pour une fonction inconnue u (à valeurs réelles)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uv) = gu + f, \tag{1.6}$$

où g et f sont deux fonctions données à valeurs réelles (v est la fonction introduite ci-dessus). L'équation (1.6) sera envisagée avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \tag{1.7}$$

et la condition d'entrée

$$u(t,x) = u_1(t,x) \quad \text{pour } (t,x) \in \bigcup_{0\le t<\infty} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big], \tag{1.8}$$

$u_0(x)$ et $u_1(t,x)$ étant des fonctions données. On suppose la condition de compatibilité

$$u_0(x) = u_1(0,x) \quad \text{pour } x \in \Gamma_-(0). \tag{1.9}$$

Nous rappelons que pour le problème (1.6)–(1.8) les points où $v \cdot n_x$ s'annule posent des questions délicates. Pour cela, nous excluons le cas d'un saut de la valeur de $v \cdot n_x$ quand $v \cdot n_x$ change de signe et, sur les points $(t,x) \in [0,\infty[\times\partial\Omega$ tels que $x \in \partial\Omega\setminus(\Gamma_-(t)\cup \Gamma_+(t))$, nous supposons les conditions suivantes :

Condition A. Nous supposons qu'il existe deux constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (ε_0 est donné dans (3.1)), telles que v, Dv, ∇f, ∇g, $\nabla(\nabla \cdot v)$ soient continues dans Σ_{ε_2}, où

$$\Sigma_{\varepsilon_2} = \{(t,x) \in [0,\infty[\times\overline{\Omega} \,|\, \text{dist}\big((t,x),\Sigma\big) < \varepsilon_2\}, \tag{1.10}$$

$$\Sigma = \{(t,x) \in [0,\infty[\times\partial\Omega \,|\, -\varepsilon_1 < v(t,x)\cdot n_x < \varepsilon_1\}, \tag{1.11}$$

$$Dv = (\frac{\partial}{\partial x_i} v_j)_{i,j=1,\cdots,n}.$$

Condition B. Si $x_0 \in \partial\Omega\setminus(\Gamma_-(t_0)\cup\Gamma_+(t_0))$, alors, quelle que soit la caractéristique γ passant par un point $(t,x) \in [0,\infty[\times\Omega$, on a

$$(t_0,x_0) \notin \overline{\gamma}.$$

Ici la caractéristique $\gamma = \{(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))\}_{t\in I_{max}}$ passant par le point $(t,x) \in [0,\infty[\times\Omega$ se définit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt'}\gamma_0(t') = 1, \quad \frac{d}{dt'}\gamma_j(t') = v_j(\gamma(t')), \quad j = 1, \cdots, n,$$

avec la condition initiale

$$\gamma_0(t) = t, \quad \gamma_j(t) = x_j, \quad j = 1, \cdots, n;$$

où I_{max} est l'intervalle maximal d'existence de la solution.

Pour ce qui concerne le gradient de $u_1(t,x)$ sur $\Gamma_-(t)$, outre le gradient $\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1$ défini de manière naturelle sur la variété de dimension $n-1$, nous défnissons la composante normale $n_x \cdot \nabla u_1$ par

$$(n_x \cdot \nabla u_1)\big|_{\Gamma_-(t)} = \frac{1}{v \cdot n_x}\big(-v_\tau \cdot \nabla_{\Gamma_-(t)} u_1 - \partial_t u_1 - u_1 \nabla \cdot v + g u_1 + f\big), \tag{1.12}$$

où $v_\tau = v - (v \cdot n_x) n_x$. La nécessité de la définition (1.12) est motivée par le fait que, si on susbstitue $v = (v \cdot n_x) n_x + v_\tau$ dans (1.6), on a

$$(v \cdot n_x) n_x \cdot \nabla u = -v_\tau \cdot \nabla u - \partial_t u - u \nabla \cdot v + g u + f.$$

Dans la suite, pour ne pas alourdir l'écriture, par abus de language, nous utiliserons les notations

$$\|\nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} = \|\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} + \|n_x \cdot \nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))}, \tag{1.13}$$

$$\|u_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(t))} = \|u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))} + \|\nabla u_1\|_{L^\infty(\Gamma_-(t))}, \tag{1.14}$$

où $n_x \cdot \nabla u_1$ est la fonction définie dans (1.12).

Sur la régularité et éventuellement sur le signe des fonctions f, g, u_0, u_1, on va les préciser dans l'énoncé des résultats.

1.3 Résultat principal pour l'équation linéaire

Le résultat principal de notre travail sur l'équation linéaire (1.6) est le suivant.

Théorème 1.3.1. *On suppose que les conditions* (1.2), (1.3) *ainsi que les conditions A et B sont remplies et que, quel que soit $\bar{t} > 0$, les fonctions v, g, f, u_0, u_1 vérifient les relations*

$$g \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \quad f \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \quad u_0 \in W^1_\infty(\Omega), \tag{1.15}$$

$$v, \nabla_{\Gamma_-(t)} u_1, f - \partial_t u_1, g - \nabla \cdot v \in L^\infty\Big(\bigcup_{0 \le t < \bar{t}} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big]\Big), \tag{1.16}$$

$$n_x \cdot \nabla u_1 \in L^\infty\Big(\bigcup_{0 \le t < \bar{t}} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big]\Big), \tag{1.17}$$

$$u_1 \text{ est uniformément continue sur } \bigcup_{0 \le t < \bar{t}} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big] \text{ et} \tag{1.18}$$

y admet presque partout la dérivée par rapport à t,

où $1 \le q \le \infty$ et $n_x \cdot \nabla u_1$ est la composante normale du gradient de u_1 dans le sens défini par le second membre de (1.12). *Alors il existe une fonction u et une seule appartenant à la classe*

$$L^\infty(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,\bar{t}; L^\infty(\Omega)),$$

qui vérifie l'équation (1.6) *presque partout dans $[0,\bar{t}] \times \Omega$, la condition* (1.7) *presque partout dans Ω et la condition* (1.8) *presque partout sur $\bigcup_{0 \le t < \infty} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big]$.*

De plus, la fonction u vérifie l'inégalité

$$\|u\|_{L^\infty(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega))} \le \max(A, \sup_{0 \le s \le \bar{t}} \operatorname{ess} B(s)), \tag{1.19}$$

où

$$A = e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}} (\|g\|_{L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega))} + \|\nabla \cdot v\|_{L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega))} + \|Dv\|_{L^q(0,\bar{t}; L^\infty(\Omega))})} \times$$

$$\times [\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \bar{t}^{\frac{q-1}{q}} \|f\|_{L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega))}],$$

$$B(s) = e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^q(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + (\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}];$$

dans le cas $q=\infty$, on remplace $\frac{q-1}{q}$ par 1. De plus, si f, u_0 et u_1 sont non-négatives, u est aussi non-négative.

On remarque que, à cause du facteur $\dfrac{1}{v\cdot n_x}$ dans le deuxième membre de (1.12), les conditions (1.16) ne sont pas suffisantes pour garantir l'appartenance du second membre de (1.12) à $L^\infty(\Gamma_-(t))$ et pour cela nous imposons la condition (1.17).

Pour démontrer le théorème 1.3.1, nous allons construire les équations approchées par la régularisation des coefficients et des données et établir des estimations des solutions approchées en utilisant les caractéristiques (une méthode dont l'utilisation directe sur le problème donné est rendue problèmatique par la basse régularité de v) ; le passage à la limite nous donnera le résultat énoncé.

1.4 Préliminaires

Pour obtenir des estimations et démontrer l'existence et l'unicité de la solution, nous allons utiliser des équations approchées avec les données initiales et d'entrée approchées. Pour ce faire, nous écrivons d'abord l'équation (1.6) dans la forme

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u + cu = f, \qquad c = \nabla\cdot v - g. \tag{1.20}$$

Construisons d'abord l'approximation des fonctions v, c, f.

On commence par prolonger les fonctions v, c, f pour $t<0$ par

$$v(t,\cdot)=0, \qquad c(t,\cdot)=c(-t,\cdot), \qquad f(t,\cdot)=0.$$

On prolonge aussi Σ_{ε_2} dans $[-1,0[\times\overline{\Omega}$ par

$$\Sigma_{\varepsilon_2} = \{(t,x) \in [-1,\infty[\times\overline{\Omega} \,|\, \mathrm{dist}\big((t,x),\Sigma\big) < \varepsilon_2\} \tag{1.21}$$

avec le même Σ défini dans (1.11) (et donc $\Sigma \subset [0,\infty[\times\partial\Omega$).

Pour $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ on pose

$$h(t,x) = \max\big(0, \min(1, 2 - \frac{3d(t,x)}{\varepsilon_2})\big),$$

où $d(t,x) = \mathrm{dist}\big((t,x), ([-1,\infty[\times\Omega)\backslash\Sigma_{\varepsilon_2}\big)$ est la distance entre le point $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $([-1,\infty[\times\Omega)\backslash\Sigma_{\varepsilon_2}$. On définit

$$\widetilde{h}(t,x) = (\zeta_{\varepsilon_h} * h)(t,x), \tag{1.22}$$

où ζ_{ε_h} est un noyau régularisant avec un rayon $\varepsilon_h = \frac{\varepsilon_2}{6}$ (ici la convolution est relative à (t,x)). On considère deux fonctions $\varrho_\varepsilon(\cdot)$ et $\xi_\varepsilon(\cdot)$ $(0<\varepsilon<\min(1,\frac{\varepsilon_2}{12}))$ définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement par

$$\varrho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varrho_1(\frac{t}{\varepsilon}), \qquad \xi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\xi_1(\frac{x}{\varepsilon}), \tag{1.23}$$

où

$$\varrho_1(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-t^2}}}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-s^2}}\,ds} & \text{pour } -1<t<1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases},$$

$$\xi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}}{\int_{\{|y|<1\}} e^{-\frac{1}{1-|y|^2}}\,dy} & \text{pour } |x|<1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Nous définissons dans $\mathbb{R}\times\Omega$ les fonctions

$$v_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))v(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{v}_\varepsilon(t,x), \tag{1.24}$$

$$c_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))c(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{c}_\varepsilon(t,x), \tag{1.25}$$

$$f_\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))f(t,x) + \widetilde{h}(t,x)\widetilde{f}_\varepsilon(t,x), \tag{1.26}$$

où

$$\widetilde{v}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)v(t,y)dy}{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \varrho_\varepsilon(t),$$

$$\widetilde{c}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)c(t,y)dy}{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \varrho_\varepsilon(t),$$

$$\widetilde{f}_\varepsilon(t,x) = \frac{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)f(t,y)dy}{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy} *_t \varrho_\varepsilon(t),$$

et $*_t$ désigne la convolution par rapport à t.

Nous définissons aussi dans Ω

$$u_0^\varepsilon(x) = (1-\widetilde{h}(0,x))u_0(x) + \widetilde{h}(0,x)\widetilde{u}_0^\varepsilon(x), \tag{1.27}$$

où

$$\widetilde{u}_0^\varepsilon(x) = \frac{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)u_0(y)dy}{\int\limits_\Omega \xi_\varepsilon(x-y)dy}.$$

En ce qui concerne la donnée d'entrée u_1, qui est définie sur $\bigcup\limits_{0\le t<\infty}\big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$, pour la commodité de notation, nous la prolongeons par 0 sur $(t,x)\in[0,\infty[\times\partial\Omega$ tels que $x\notin\Gamma_-(t)$ (en réalité ce prolongement n'intervient pas dans nos raisonnements grâce au choix $0<\varepsilon<\min(1,\frac{\varepsilon_2}{12})$, mais peut faciliter l'écriture) ; on prolonge $u_1(t,x)$ aussi sur $[-1,0[\times\partial\Omega$ par 0. Cela étant, on définit

$$\overline{u}_1^\varepsilon(t,x) = \frac{\int\limits_{\partial\Omega} \xi_\varepsilon(x-y)u_1(t,y)dS_y}{\int\limits_{\partial\Omega} \xi_\varepsilon(x-y)dS_y},$$

$$u_1^\varepsilon(t,x) = (1-\widetilde{h}(t,x))(u_1(\cdot,x) *_t \varrho_\varepsilon(\cdot))(t) + \widetilde{h}(t,x)(\overline{u}_1^\varepsilon(\cdot,x) *_t \varrho_\varepsilon(\cdot))(t). \tag{1.28}$$

Les fonctions $c_\varepsilon, v_\varepsilon, f_\varepsilon, u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon$ étant bien définies, on considère l'équation pour la

fonction inconnue u^ε

$$\partial_t u^\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + c_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon + u_0^\varepsilon \varrho_\varepsilon(t) \quad \text{dans } [-1,\infty[\times\Omega, \tag{1.29}$$

avec la condition initiale

$$u^\varepsilon(-1,\cdot) = 0 \quad \text{sur } \Omega, \tag{1.30}$$

et la condition d'entrée

$$u^\varepsilon(\cdot,\cdot) = u_1^\varepsilon(\cdot,\cdot) \quad \text{sur } \{(t,x) \in [-1,\infty[\times\partial\Omega \,|\, x \in \Gamma_-^\varepsilon(t)\}, \tag{1.31}$$

où

$$\Gamma_-^\varepsilon(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, v_\varepsilon(t,x)\cdot n_x < 0\};$$

le choix de $\varepsilon \in]0, \min(1, \frac{\varepsilon_2}{12})[$, de v_ε et de u_1^ε (voir (1.23), (1.24), (1.28)) nous garantit que $\Gamma_-^\varepsilon(t) = \Gamma_-(t)$ pour $t \geq 0$ et que, si $u_1^\varepsilon(t,x) \neq 0$, alors $x \in \Gamma_-^\varepsilon(t)$.

Nous allons considérer le problème (1.29)–(1.31) comme problème approché de (1.6)–(1.8).

Comme v_ε est une fonction suffisamment régulière, pour tout $(t,x) \in]-1,\infty[\times\Omega$ il existe l'unique caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$ telle que $(t,x) \in \gamma$. Cette caractéristique $\gamma = (\gamma_0, \widetilde{\gamma})$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, est définie par les équations différentielles

$$\frac{d}{dt'}\gamma_0(t') = 1, \quad \frac{d}{dt'}\widetilde{\gamma}(t') = v_\varepsilon(t', \widetilde{\gamma}(t')) = v_\varepsilon(\gamma(t')) \tag{1.32}$$

avec les conditions initiales

$$\gamma_0(t) = t, \quad \widetilde{\gamma}(t) = x$$

Si on pose

$$s = \inf\{\, t' < t \,|\, \gamma(t') \in]-1,\infty[\times\Omega \,\}, \tag{1.33}$$

alors, en tenant compte que $\{\, x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v_\varepsilon(s,x) < 0 \,\} = \Gamma_-^\varepsilon(s)$, on a ou "$s = -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Omega$" ou "$s > -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Gamma_-^\varepsilon(s)$" (dans ce dernier cas on a nécessairement $s > -\varepsilon$) ; le cas

"$s = -1$ et $\widetilde{\gamma}(s) \in \Gamma^\varepsilon_-(-1)$" est exclu par le choix $\varepsilon < 1$. Dans tous les cas la solution u^ε peut être exprimée par la solution de l'équation différentielle sur la caractéritique. Plus précisément, $u^\varepsilon = u^\varepsilon(\gamma(\cdot))$ est la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}u^\varepsilon + c_\varepsilon u^\varepsilon = f_\varepsilon + u^\varepsilon_0 \varrho_\varepsilon(t) \tag{1.34}$$

sur $\gamma = \gamma^\varepsilon$ avec la condition initiale

$$u^\varepsilon(s) = \begin{cases} u^\varepsilon_1(\gamma(s)) & \text{si} \quad s > -1 \\ 0 & \text{si} \quad s = -1 \end{cases} . \tag{1.35}$$

On remarque que, si $f \geq 0$, $u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$, alors $f_\varepsilon \geq 0$, $u^\varepsilon_0 \geq 0$, $u^\varepsilon_1 \geq 0$ et donc la solution u^ε de (1.34) sera elle aussi non-négative.

Nous donnons un lemme technique.

Lemme 1.4.1. *Soient $\gamma = \gamma^\varepsilon$ une caractéristique définie par (1.32) et s l'instant défini par (1.33). Si on pose*

$$\lambda_\varepsilon(s) = \int_{-1}^{s} \varrho_\varepsilon(t')\,dt',$$

on a, pour tout $t > s$,

$$\int_s^t \varrho_\varepsilon(t')|u^\varepsilon_0(\gamma(t'))|\,dt' \leq (1 - \lambda_\varepsilon(s))\|u^\varepsilon_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{1.36}$$

$$|u^\varepsilon_1(s,x)| \leq \lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde{h}(s,x)\|\overline{u}^\varepsilon_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + \tag{1.37}$$

$$+(1-\tilde{h}(s,x))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big),$$

où $[\tau]^+ = \max(\tau, 0)$ (ici u_1 se considère prolongée par 0 pour $(t,x) \in [-1,\infty[\times\partial\Omega$ tels que $x \notin \Gamma_-(t)$).

Démonstration. On a

$$\int_s^t \varrho_\varepsilon(t')|u_0^\varepsilon(\gamma(t'))|dt' \leq \int_s^t \varrho_\varepsilon(t')dt' \|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)},$$

d'où, compte tenu de la relation $\int_s^t \varrho_\varepsilon(t')dt' \leq 1-\lambda_\varepsilon(s)$, on obtient (1.36).

D'autre part, on a

$$|(u_1(\cdot,x) *_t \varrho_\varepsilon(\cdot))(s)| \leq \int_{\max(0,s-\varepsilon)}^{\max(0,s+\varepsilon)} |u_1(t',x)|\varrho_\varepsilon(s-t')dt' \leq$$

$$\leq \|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\lambda_\varepsilon(s);$$

analoguement on a

$$|(\overline{u}_1^\varepsilon(\cdot,x) *_t \varrho_\varepsilon(\cdot))(s)| \leq \|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\lambda_\varepsilon(s).$$

De ces inégalités et de (1.28) on déduit (1.37), ce qui achève la démonstration. □

1.5 Estimation des solutions approchées sur les caractéristiques

L'estimation de la solution approchée u^ε et de son gradient sur les caractéristiques $\gamma = \gamma^\varepsilon$, qui joue le rôle central pour la démonstration du théorème 1.3.1, est donnée par le lemme suivant.

Lemme 1.5.1. *Sur chaque caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$, la solution u^ε du problème approché (1.29)–(1.31) vérifie les inégalités*

$$|u^\varepsilon(t)| \leq \Big(\lambda_\varepsilon(s)\big[\tilde{h}(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}+ \tag{1.38}$$

$$+(1-\tilde{h}(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big] + (1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t |c_\varepsilon(t')|dt'} +$$

$$+\int_{\max(-\varepsilon,s)}^{t} |f_\varepsilon(t')| e^{\int_{t'}^{t} |c_\varepsilon(t'')| dt''} dt',$$

$$|\nabla u^\varepsilon(t)| \le \tag{1.39}$$

$$\le \Big(\lambda_\varepsilon(s)\big[\tilde{h}(s)\|\nabla \overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + (1-\tilde{h}(s))\|\nabla u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} +$$

$$+|\nabla\tilde{h}(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon - u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big] + (1-\lambda_\varepsilon(s))\|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) e^{\int_{\max(-\varepsilon,s)}^{t} \omega_\varepsilon(t')dt'} +$$

$$+\int_{\max(-\varepsilon,s)}^{t} \big(|\nabla f_\varepsilon(t')| + |u^\varepsilon(t')||\nabla c_\varepsilon(t')|\big) e^{\int_{t'}^{t} \omega_\varepsilon(t'')dt''} dt'.$$

où $\omega_\varepsilon(t) = \max_{i,j=1,\cdots,n} |\delta_{ij} c_\varepsilon + \partial_{x_i} v_{\varepsilon,j}|$ *et* $\tilde{h}(s) = \tilde{h}(\gamma(s))$.

On précise que, comme dans l'énoncé du théorème 1.3.1, dans (1.39) la composante normale de ∇u_1 est donnée dans (1.12) (si $v\cdot n_x < 0$) et celle de $\nabla \overline{u}_1^\varepsilon$ est définie de manière analogue (voir (1.43) en bas pour son expression explicite). On précise aussi que dans les seconds membres de ces inégalités on considère u_1 prolongée par 0 sur $[0,\infty[\times\partial\Omega \setminus \bigcup_{0\le t<\infty} \big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]$ comme nous l'avons posé dans la section 1.4.

Démonstration. Rappelons que la solution u^ε du problème (1.29)–(1.31) peut être construite par la solution du problème de Cauchy (1.34)–(1.35) sur chaque caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$. Comme l'équation (1.34) est linéaire, on obtient immédiatement, si $\gamma(s) \in \partial\Omega$ (et donc $s > -\varepsilon$),

$$|u^\varepsilon(t)| \le |u_1^\varepsilon(\gamma(s))| e^{\int_s^t |c_\varepsilon(t')| dt'} + \int_s^t |f_\varepsilon(t') + u_0^\varepsilon(\gamma(t'))\varrho_\varepsilon(t')| e^{\int_{t'}^t |c_\varepsilon(t'')| dt''} dt',$$

et, si $\gamma(s) = \gamma(-1) \in \Omega$ (et donc $s = -1$),

$$|u^\varepsilon(t)| \le \int_{-\varepsilon}^t |f_\varepsilon(t') + u_0^\varepsilon(\gamma(t'))\varrho_\varepsilon(t')| e^{\int_{t'}^t |c_\varepsilon(t'')| dt''} dt'.$$

D'après le lemme 1.4.1, on en déduit l'inégalité (1.38).

Concernant la deuxième inégalité, en dérivant par rapport à x_i les deux membres de l'équation (1.29) et en posant $w_i^\varepsilon = \partial_{x_i} u^\varepsilon$, $L_{\varepsilon,i} = \partial_{x_i} f_\varepsilon - u^\varepsilon \partial_{x_i} c_\varepsilon$ et $w_{0,i}^\varepsilon = \partial_{x_i} u_0^\varepsilon$ pour $i = 1, \cdots, n$, on obtient

$$\partial_t w_i^\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla w_i^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} c_\varepsilon + \partial_{x_i} v_{\varepsilon,j}) w_j^\varepsilon = L_{\varepsilon,i} + w_{0,i}^\varepsilon \varrho_\varepsilon(t) \quad \text{dans } [-1,\bar{t}] \times \Omega. \tag{1.40}$$

On considère cette équation avec la condition initiale

$$w_i^\varepsilon(-1,\cdot) = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{1.41}$$

et la condition d'entrée

$$w_i^\varepsilon(\cdot,\cdot) = \partial_{x_i} u_1^\varepsilon \quad \text{sur} \quad [-1,\bar{t}] \times \partial\Omega. \tag{1.42}$$

On précise que dans (1.42) w_i^ε désigne la $i^{\text{ième}}$ composante du gradient ∇u_1^ε composé par sa composante tangentielle qui est le gradient (naturel) $\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1^\varepsilon$ sur la variété $\Gamma_-(t)$ et la composante normale définie par

$$(n_x \cdot \nabla u_1^\varepsilon)|_{\Gamma_-(t)} = \frac{1}{v_\varepsilon \cdot n_x}\big(- v_{\tau,\varepsilon} \cdot \nabla_{\Gamma_-(t)} u_1^\varepsilon - \partial_t u_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon \nabla \cdot v_\varepsilon + g_\varepsilon u_1^\varepsilon + f_\varepsilon + u_0^\varepsilon \varrho_\varepsilon \big), \tag{1.43}$$

où $v_{\tau,\varepsilon} = v_\varepsilon - (v_\varepsilon \cdot n_x) n_x$.

Sur chaque caractéristique $\gamma = \gamma^\varepsilon$ l'équation (1.40) se réduit à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d}{dt} w_i^\varepsilon + \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} c_\varepsilon + \partial_{x_i} v_{\varepsilon,j}) w_j^\varepsilon = L_{\varepsilon,i} + w_{0,i}^\varepsilon \varrho_\varepsilon(t), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{1.44}$$

On pose

$$W^\varepsilon(t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^\varepsilon(t)^2}.$$

En multipliant les deux membres de (1.44) par w_i^ε et en faisant la somme de ces équa-

tions, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(W^\varepsilon(t))^2 = -\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}c_\varepsilon + \partial_{x_i}v_{\varepsilon,j})w_j^\varepsilon w_i^\varepsilon + \sum_{i=1}^{n}L_{\varepsilon,i}w_i^\varepsilon + \varrho_\varepsilon(t)\sum_{i=1}^{n}w_{0,i}^\varepsilon w_i^\varepsilon; \tag{1.45}$$

cette équation différentielle ordinaire sur une caractéristique γ doit être envisagée avec la condition initiale

$$W^\varepsilon(s) = |\nabla u_1^\varepsilon(\gamma(s))| \equiv \overline{W}_s^\varepsilon, \quad \text{pour} \quad s \in [-1, \overline{t}],$$

où s est défini par (1.33) et $\nabla u_1^\varepsilon(\gamma(s))$ doit être entendu dans le sens précisé après (1.42).

Si on pose

$$\omega_\varepsilon(t) = \max_{i,j=1,\cdots,n}|\delta_{ij}c_\varepsilon + \partial_{x_i}v_{\varepsilon,j}|,$$

$$L_\varepsilon = (L_{\varepsilon,1}, \cdots, L_{\varepsilon,n}),$$

de l'égalité (1.45) on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(W^\varepsilon(t))^2 \le \omega_\varepsilon(t)(W^\varepsilon(t))^2 + |L_\varepsilon(t)|W^\varepsilon(t) + \varrho_\varepsilon(t)W^\varepsilon(t)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_{0,i}^\varepsilon(\gamma(t)))^2}.$$

Donc, pour tout $\delta > 0$, on a

$$(W^\varepsilon(t))^2 \le Y_\delta(t), \quad \text{pour } t \ge s,$$

où $Y_\delta(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Y_\delta(t) = \omega_\varepsilon(t)Y_\delta(t) + |L_\varepsilon(t)|\sqrt{Y_\delta(t)} + \varrho_\varepsilon(t)\sqrt{Y_\delta(t)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_{0,i}^\varepsilon(\gamma(t)))^2}, \tag{1.46}$$

$$Y_\delta(s) = (\overline{W}_s^\varepsilon + \delta)^2. \tag{1.47}$$

Or, comme $Y_\delta(t)$ est strictement positive, pour tout $t \ge s$, on peut diviser les deux

membres de (1.46) par $\sqrt{Y_\delta(t)}$, de sorte que l'on a

$$W^\varepsilon(t) \le y_\delta(t) \quad \text{pour } t \ge s,$$

où $y_\delta(t)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt} y_\delta(t) = \omega_\varepsilon(t) y_\delta(t) + |L_\varepsilon(t)| + \varrho_\varepsilon(t)\sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t)))^2},$$

$$y_\delta(s) = \overline{W}^\varepsilon_s + \delta.$$

Comme $y_\delta(t)$ tend vers

$$y(t) = \overline{W}^\varepsilon_s e^{\int_s^t \omega_\varepsilon(t')dt'} + \int_s^t (|L_\varepsilon(t')| + \varrho_\varepsilon(t')\sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2}) e^{\int_{t'}^t \omega_\varepsilon(t'')dt''} dt',$$

quand $\delta \to 0$, on a

$$W^\varepsilon(t) \le \overline{W}^\varepsilon_s e^{\int_s^t \omega_\varepsilon(t')dt'} + \int_s^t (|L_\varepsilon(t')| + \varrho_\varepsilon(t')\sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2}) e^{\int_{t'}^t \omega_\varepsilon(t'')dt''} dt'.$$

D'après le lemme 1.4.1 on a

$$\int_s^t \varrho_\varepsilon(t')\sqrt{\sum_{i=1}^n (w^\varepsilon_{0,i}(\gamma(t')))^2 dt'} \le (1-\lambda_\varepsilon(s))\|\nabla u^\varepsilon_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$\overline{W}^\varepsilon_s \le \lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde h(s)\|\nabla \overline{u}^\varepsilon_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + (1-\tilde h(s))\|\nabla u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} +$$

$$+|\nabla \tilde h(s)|\|\overline{u}^\varepsilon_1 - u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big).$$

Comme l'intégrale $\int_s^t \cdot\, dt'$ peut être remplacée par $\int_{\max(-\varepsilon,s)}^t \cdot\, dt'$ (voir la définition de $\overline{W}^\varepsilon_s$, $L_\varepsilon(t)$, $\varrho_\varepsilon(t)$), on en déduit l'inégalité (1.39). □

1.6 Démonstration du théorème 1.3.1

Démonstration. On pose

$$\Lambda_\varepsilon(t) = e^{\int\limits_{\max(-\varepsilon,s)}^{t} (e^{\int\limits_{\max(-\varepsilon,s)}^{t}(|c_\varepsilon(t'')|+|Dv_\varepsilon(t'')|)dt''} |\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times$$

$$\times\left[\lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde{h}(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))} + (1-\tilde{h}(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))} +\right.$$

$$+|\nabla\tilde{h}(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon - u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big) + (1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{W^1_\infty(\Omega)} +$$

$$\left.+\int\limits_{\max(-\varepsilon,s)}^{t}\big(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|\big)dt'\right].$$

En faisant la somme de (1.38) et (1.39) sur chaque caractéristique $\gamma=\gamma^\varepsilon$ et en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|u^\varepsilon(t)|+|\nabla u^\varepsilon(t)| \le \Lambda_\varepsilon(t). \tag{1.48}$$

D'autre part, si on pose $s_\varepsilon = [s]^+ + \varepsilon$ et si on considère r_1 et r_2 tels que $s_\varepsilon \le r_1 < r_2 \le t$, alors, en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 5.1, on a

$$|u^\varepsilon(r_2)| \le e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}|c_\varepsilon(t')|dt'}\Big(|u^\varepsilon(r_1)| + \int\limits_{r_1}^{r_2}|f_\varepsilon(t')|dt'\Big),$$

$$|\nabla u^\varepsilon(r_2)| \le e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}\omega_\varepsilon(t')dt'}\Big(|\nabla u^\varepsilon(r_1)| + \int\limits_{r_1}^{r_2}(|\nabla f_\varepsilon(t')| + |u^\varepsilon(t')||\nabla c_\varepsilon(t')|)dt'\Big)$$

et par conséquent

$$|u^\varepsilon(r_2)|+|\nabla u^\varepsilon(r_2)| \le e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}(e^{\int\limits_{r_1}^{r_2}(|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'}|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times$$

$$\times\Big(|u^\varepsilon(r_1)|+|\nabla u^\varepsilon(r_1)| + \int\limits_{r_1}^{r_2}(|f_\varepsilon(t')|+|\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\Big).$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $(r_1, r_2) \in [s_\varepsilon, t] \times [s_\varepsilon, t]$ avec $r_1 < r_2$, d'après le lemme 4.3 de [Asc 14], on a

$$|u^\varepsilon(t)| + |\nabla u^\varepsilon(t)| \le e^{\int_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times \tag{1.49}$$

$$\times\Big(|u^\varepsilon(s_\varepsilon)| + |\nabla u^\varepsilon(s_\varepsilon)| + \int_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')| + |\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\Big).$$

En tenant compte que l'inégalité (1.48) est vérifiée aussi pour $t = s_\varepsilon$, de (1.49) on peut déduire

$$|u^\varepsilon(t)| + |\nabla u^\varepsilon(t)| \le e^{\int_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times \tag{1.50}$$

$$\times\Big(\Lambda_\varepsilon(s_\varepsilon) + \int_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')| + |\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\Big).$$

Si on examine l'expression de $\Lambda_\varepsilon(s_\varepsilon)$, on peut déduire de (1.50) qu'il existe deux fonctions continues $\nu_1(\cdot)$ et $\nu_2(\cdot)$ définies sur $[0, \min(1, \frac{\varepsilon_2}{12})]$ telles que $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$ et que

$$|u^\varepsilon(t)| + |\nabla u^\varepsilon(t)| \le e^{\int_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c_\varepsilon(t')|+|c_\varepsilon(t')|+|Dv_\varepsilon(t')|)dt'} \times \tag{1.51}$$

$$\times\Big(e^{\nu_1(\varepsilon)}\big[\lambda_\varepsilon(s)\big(\tilde h(s)\|\overline{u}_1^\varepsilon\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))} + (1-\tilde h(s))\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))} +$$

$$+|\nabla\tilde h(s)|\|\overline{u}_1^\varepsilon - u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)}\big) + (1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0^\varepsilon\|_{W^1_\infty(\Omega)}\big] +$$

$$+\int_{s_\varepsilon}^{t}(|f_\varepsilon(t')| + |\nabla f_\varepsilon(t')|)dt'\Big) + \nu_2(\varepsilon).$$

Compte tenu de la relation $\lambda_\varepsilon(s)\alpha + (1-\lambda_\varepsilon(s))\beta \le \max(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ et des définitions de $\overline{u}_1^\varepsilon$, u_0^ε, f_ε ($\|\overline{u}_1^\varepsilon - u_1\|_{L^\infty} \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$ grâce à (1.18)), on déduit que le second membre de (1.51) est majoré par

$$e^{\nu_1(\varepsilon)}\max(\widetilde{A}(t), \sup_{0\le s\le t}\text{ess}\widetilde{B}(t;s)) + \nu_2(\varepsilon), \tag{1.52}$$

où

$$\widetilde{A}(t) = e^{\int_0^t(\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\Big(\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}dt'\Big),$$

$$\widetilde{B}(t;s) = e^{\int_s^t (\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \Big(\|u_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + \int_s^t \|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)} dt'\Big).$$

Cela étant, on remarque que $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))$, ce qui, en vertu de (1.29), implique que $\{\partial_t u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^q(0,\overline{t};L^\infty(\Omega))$. Par conséquent, il existe une suite $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ et une fonction $u \in L^\infty(0,\overline{t};W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,\overline{t};L^\infty(\Omega))$ telles que $\varepsilon_j \to 0$ pour $j \to \infty$, u^{ε_j} et ∇u^{ε_j} convergent faiblement-$*$ vers u et ∇u dans $L^\infty([0,\overline{t}] \times \Omega)$ et $\partial_t u^{\varepsilon_j}$ converge faiblement vers $\partial_t u$ dans $L^q(0,\overline{t};L^\infty(\Omega))$ (dans le cas $q = 1$, en établissant d'abord (1.54), on peut procéder de manière analogue à la démonstration du point (b) du lemme 4.4 de [Asc 14]). Donc, en faisant tendre ε_j vers 0 dans (1.52), on obtient

$$\|u(t)\|_{W^1_\infty(\Omega)} \le \max(\widetilde{A}(t), \sup_{0\le s\le t} \mathrm{ess}\widetilde{B}(t;s)). \tag{1.53}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder aux intégrales dans l'expression de $\widetilde{A}$ et de $\widetilde{B}$ et en rappelant la définition de $c(t)$, on parvient à (1.19).

De plus, u^{ε_j} vérifie, pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^1([-1,\overline{t}] \times \overline{\Omega})$ telle que

$$\varphi(t,x) = 0 \quad \text{sur} \quad ([-1,0] \times \Gamma_+(0)) \cup \Big(\bigcup_{0<t\le\overline{t}} (\{t\} \times \Gamma_+(t))\Big) \cup (\{\overline{t}\} \times \overline{\Omega}),$$

l'égalité

$$\int_{-1}^{\overline{t}} dt \int_\Omega [u^{\varepsilon_j}(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_{\varepsilon_j}\cdot\nabla\varphi + (\nabla\cdot v_{\varepsilon_j})\varphi - c_{\varepsilon_j}\varphi) + f_{\varepsilon_j}\varphi + u_0^{\varepsilon_j}\varrho_{\varepsilon_j}(t)\varphi]dx =$$

$$= \int_{-1}^{\overline{t}} \int_{\partial\Omega} u_1^{\varepsilon_j}\varphi(t,x)\,dt\,dS.$$

En passant à la limite pour $\varepsilon_j \to 0$, on a

$$\int_0^{\overline{t}} dt \int_\Omega [u(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v\cdot\nabla\varphi + g\varphi) + f\varphi]dx = \int_0^{\overline{t}} \int_{\Gamma_-(t)} (v\cdot n)u_1\varphi\,dS\,dt - \int_\Omega u_0\varphi(0,x)dx. \tag{1.54}$$

Comme dans (1.54) φ est arbitraire dans la classe indiquée, on peut affirmer que u vérifie l'équation (1.6) et les conditions (1.7)-(1.8) presque partout dans les domaines relatifs.

Si $u^{[1]}$ et $u^{[2]}$ sont deux solutions du problème (1.6)-(1.8), alors $U = u^{[2]} - u^{[1]}$ satisfait à l'équation (1.6) avec $f = 0$ et avec les conditions initiale et d'entrée nulles, de sorte que, compte tenu que $v \cdot n > 0$ sur $\Gamma_+(t)$, par le produit scalaire de l'équation (1.6) avec U même, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2_{L^2(\Omega)} = -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_+(t)} |U|^2 v \cdot n dS + \int_\Omega (g - \frac{1}{2}(\nabla \cdot v))|U|^2 dx \leq$$

$$\leq \|(g - \frac{1}{2}(\nabla \cdot v))\|_{L^\infty(\Omega)} \|U\|^2_{L^2(\Omega)},$$

d'où, compte tenu de la condition $\|U\|^2_{L^2(\Omega)}\big|_{t=0} = 0$, on obtient $\|U\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ pour tout $t \geq 0$, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème (1.6)-(1.8).

En outre, si $f \geq 0$, $u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$, alors, u^{ε_j} étant elles aussi non-négatives, en passant à la limite, on a $u \geq 0$. □

Remarque 1.6.1. De manière analogue à la démonstration du théorème 1.3.1, on peut donner une estimation de u et une de son gradient ∇u dans la norme L^∞ par les inégalités ci-dessous

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max(A_1(t), \sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{ess} B_1(t;s)) \quad \forall t \in [0, \bar{t}], \tag{1.55}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max(A_2(t), \sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{ess}\, B_2(t;s)) \quad \forall t \in [0, \bar{t}], \tag{1.56}$$

où

$$A_1(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} [\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} dt'],$$

$$B_1(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} [\|u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} + \int_s^t \|f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} dt'],$$

$$A_2(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'} \big(\|\nabla u_0\|_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+\int_0^t (\|\nabla f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(g-\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big),$$

$$B_2(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+\|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\big(\|\nabla u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))}+$$

$$+\int_s^t (\|\nabla f(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla(g-\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big).$$

Corollaire 1.6.1. *Soient u une fonction qui vérifie l'égalité (1.54) et u' une autre fonction qui vérifie la même égalité où v, g, f, u_0 et u_1 sont remplacées par v', g', f', u'_0 et u'_1 respectivement avec la condition $v\cdot n_x = v'\cdot n_x$ sur $[0,\overline{t}]\times\partial\Omega$. Alors pour tout $t\in[0,\overline{t}]$ on a*

$$\|u(t)-u'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \max\big(A^*(t), \sup_{0\le s\le t} \mathrm{ess} B^*(t;s)\big) \tag{1.57}$$

et, dans le cas où $u_1 = u'_1$, on a

$$\|u(t)-u'(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le A^*(t), \tag{1.58}$$

où

$$A^*(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+\|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\big[\|u_0-u'_0\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\int_0^t (\|f(t')-f'(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t')-v'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|(\nabla\cdot v-g)(t')-(\nabla\cdot v'-g')(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big],$$

$$B^*(t;s) = e^{\int_s^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+\|(\nabla\cdot v)(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\big[\|u_1(s)-u'_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))}+$$

$$+\int_s^t (\|f(t')-f'(t')\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(t')-v'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)}+$$

$$+\|(\nabla\cdot v-g)(t')-(\nabla\cdot v'-g')(t')\|_{L^\infty(\Omega)}\|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'\big].$$

Démonstration. Comme $u-u'$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial(u-u')}{\partial t}+\nabla\cdot((u-u')v)=g(u-u')+(f-f')-(v-v')\cdot\nabla u'+$$

$$-[(\nabla\cdot v-g)-(\nabla\cdot v'-g')]u',$$

en appliquant (1.55) à $u-u'$, on obtient (1.57).

Dans le cas où $u_1=u'_1$, on voit aisément que $B^*(s)\leq A^*$, d'où (1.58). □

Montrons maintenant une variante du théorème 1.3.1. En utilisant les notations $\Omega^+=\Omega\times]0,+\infty[$, $\widetilde{\nabla}=(\nabla,\partial_m)=(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n},\partial_m)$ et $\widetilde{v}=(v,v_m)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, on considère le problème

$$\partial_t u+\widetilde{\nabla}\cdot(u\widetilde{v})=gu+f \qquad \text{dans} \quad [0,\overline{t}]\times\Omega^+, \tag{1.59}$$

$$u(0,x,m)=u_0(x,m) \qquad \text{dans} \quad \Omega^+, \tag{1.60}$$

$$u(t,x,m)=u_1(t,x,m) \qquad \text{sur} \quad \bigcup_{0\leq t\leq\overline{t}}\{t\}\times\widetilde{\Gamma}_-(t), \tag{1.61}$$

où $\widetilde{\Gamma}_-(t)=\{(x,m)\in\partial\Omega\times]0,\infty[\,|\,n_x\cdot v(t,x,m)<0\}$. On suppose que les conditions A, B, (1.16), (1.17) et (1.18) sont vérifiées avec les modifications formelles consistant au remplacement de Σ_{ε_2} par

$$\widetilde{\Sigma}_{\varepsilon_2}=\{(t,x,m)\in[0,\infty[\times\overline{\Omega}\times[0,\infty[\,|\,\mathrm{dist}\big((t,x,m),\widetilde{\Sigma}\big)<\varepsilon_2\}$$

avec

$$\widetilde{\Sigma}=\{(t,x,m)\in[0,\infty[\times\partial\Omega\times]0,\infty[\,|-\varepsilon_1<v(t,x,m)\cdot n_x<\varepsilon_1\},$$

de $\Gamma_-(t_0)\cup\Gamma_+(t_0)$ par $\widetilde{\Gamma}_-(t_0)\cup\widetilde{\Gamma}_+(t_0)$ (avec $\widetilde{\Gamma}_+(t_0)$ défini de la manière naturelle), de la caractéristique γ par la caractéristique $\widetilde{\gamma}$ définie de la manière naturelle dans $[0,\infty[\times\Omega^+$ et de $L^\infty\big(\bigcup_{0\leq t\leq\overline{t}}[\{t\}\times\Gamma_-(t)]\big)$ par $L^\infty\big(\bigcup_{0\leq t\leq\overline{t}}[\{t\}\times\widetilde{\Gamma}_-(t)]\big)$. Pour ce problème on a l'affirmation suivante.

Corollaire 1.6.2. *Soit $\overline{t} > 0$ (arbitraire). On suppose que*

$$\widetilde{v} \in L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+;\mathbb{R}^{n+1})), \qquad \widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{v} \in L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+)), \tag{1.62}$$

$$g, f \in L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+)), \qquad u_0 \in W^1_\infty(\Omega^+), \tag{1.63}$$

$$v_m(t,x,m) = 0 \quad si \ \ m \in]0,m_0[\cup]M_0,\infty[, \tag{1.64}$$

$$u_0(x,m) = 0 \quad si \ \ m \in]0,m_0[\cup]M_0,\infty[\tag{1.65}$$

$$u_1(t,x,m) = 0 \quad si \ \ (x,m) \in \widetilde{\Gamma}_-(t) \ \ et \ \ m \in]0,m_0[\cup]M_0,\infty[, \tag{1.66}$$

$$f(t,x,m) = 0 \quad si \ \ m \in]0,m_0[\cup]M_0,\infty[, \tag{1.67}$$

où $1 \le q \le \infty$ et $M_0 > m_0 > 0$. Alors le problème (1.59)–(1.61) admet une solution u et une seule dans $L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+)) \cap W^1_q(0,\overline{t}; L^\infty(\Omega^+))$; l'estimation (1.19) reste valable en remplaç ant Ω, ∇, v par Ω^+, $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{v}$ respectivement et on a $\operatorname{supp} u(t,x,\cdot) \subseteq [m_0, M_0]$ *pour tout $(t,x) \in [0,\overline{t}] \times \Omega$. De plus, si f, u_0 et u_1 sont non-négatives alors u l'est aussi.*

Démonstration. La condition (1.64) implique que les trajectoires qui passent par une partie de $\Omega\times[m_0,M_0]$ restent toujours dans $\Omega\times[m_0,M_0]$, ce qui nous permet de procéder, dans le domaine $\Omega\times]m_0-\varepsilon, M_0+\varepsilon[$ (avec un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit), de manière toute analogue au raisonnement de la démonstration du théorème 1.3.1.

D'autre part pour $m \notin [m_0, M_0]$, le problème (1.59)–(1.61) se réduit à

$$\begin{aligned}
\partial_t u + \nabla\cdot(uv) &= gu &&\text{dans} \quad [0,\overline{t}]\times\Omega,\\
u(0,x) &= 0 &&\text{dans} \quad \Omega,\\
u(t,x) &= 0 &&\text{sur} \quad \bigcup_{0\le t\le \overline{t}} \big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big],
\end{aligned}$$

ce qui implique que $u = 0$ dans $\Omega\times(]0,m_0[\cup]M_0,\infty[)$. □

On pourrait affaiblir la condition sur le support des fonctions sur $[m_0, M_0]$, mais

dans ce travail nous nous limitons à cette version de variante, que nous allons utiliser dans la section suivante.

De manière analogue à la démonstration du corollaire 1.6.1, on peut avoir une inégalité similaire à (1.58) pour deux solutions u et u' du problème (1.59)–(1.61) avec les conventions de notation analogues au cas (1.58)

$$\|u(t) - u'(t)\|_{L^\infty(\Omega^+)} \leq \widetilde{A}^*(t), \tag{1.68}$$

où

$$\widetilde{A}^*(t) = e^{\int_0^t (\|g(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} + \|(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{v})(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)})dt'} \big[\|u_0 - u_0'\|_{L^\infty(\Omega^+)} +$$
$$+ \int_0^t (\|f(t') - f'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} + \|\widetilde{v}(t') - \widetilde{v}'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} \|\widetilde{\nabla} u'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} +$$
$$+ \|(\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{v} - g)(t') - (\widetilde{\nabla}\cdot\widetilde{v}' - g')(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)} \|u'(t')\|_{L^\infty(\Omega^+)})dt'\big].$$

1.7 Conclusion

Il nous semble que les hypothèses du présent travail sont suffisamment faibles (au moins par rapport à la méthode utilisée), même si nous ne pouvons pas exclure l'éventualité d'affaiblissement des hypothèses ; il nous semble que l'éventuel affaiblissement d'hypothèses exigera une nouvelle argumentation assez consistante, exigeant un nouveau travail.

2

Application à un modèle pour l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau

NOUS allons étudier un système d'équations quasi-linéaires, qui correspond à une partie du système d'équations du modèle du mouvement de l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau proposé dans [SEL 11] (voir aussi [BEN 18]).

2.1 Position du problème et résultat principal

Nous considérons notre système d'équations pour les fonctions inconnues $\varrho(t,x)$, $\pi(t,x)$, $\sigma(t,x,m)$ dans $\Omega^+ = \Omega\times]0,\infty[$ où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^3$ muni de la frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathscr{C}^1$ ($t\in[0,\overline{t}]$, $x\in\Omega$, $m>0$) ; les fonctions $\varrho(t,x)$, $\pi(t,x)$, $\sigma(t,x,m)$ représenteraient, dans le modèle de l'atmosphère, la densité de l'air sec, la densité de la vapeur d'eau et la densité de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse m respectivement. Plus précisément, en désignant par $v(t,x)$ la vitesse de l'air (c'est-à-dire, vitesse pour ϱ et π) et par $w(t,x,m)$ la vitesse des gouttelettes d'eau (c'est-à-dire, vitesse pour σ), nous considérons le système d'équations

$$\partial_t\varrho + \nabla\cdot(\varrho v) = 0, \tag{2.1}$$

$$\partial_t\pi + \nabla\cdot(\pi v) = -H_{gl}(\pi,\sigma), \tag{2.2}$$

$$\partial_t\sigma + \nabla\cdot(\sigma w) + \partial_m(m h_{gl}\sigma) + S_0(\pi,\sigma)\sigma = S_1(\pi,\sigma), \tag{2.3}$$

où

$$H_{gl}(\pi,\sigma) = (\pi-\overline{\pi}_{vs})\int_0^\infty s(m)\sigma(m)dm,$$

$$h_{gl}(\pi;m) = s(m)(\pi-\overline{\pi}_{vs}),$$

$$S_0(\pi,\sigma) = -h_{gl} + g_1(m)[\pi-\overline{\pi}_{vs}]^- + m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m')dm',$$

$$S_1(\pi,\sigma) = g_0(m)\tilde{P}(\sigma)[\pi-\overline{\pi}_{vs}]^+ + \frac{m}{2}\int_0^m \beta(m,m-m')\sigma(m')\sigma(m-m')dm',$$

$\overline{\pi}_{vs}\in L^q(0,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))$, $s,g_1,g_0\in W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$, $\beta\in W^1_\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$, $s\geq 0$, $g_0\geq 0$, $\beta\geq 0$, tandis que $\widetilde{P}(\cdot)$ est un opérateur lipschitzien défini sur $W^1_\infty(\Omega^+)$ à valeurs dans $W^1_\infty(\Omega)$ tel que $\widetilde{P}(\sigma)\geq 0$ pour tout $\sigma\geq 0$; nous supposons que $1\leq q\leq\infty$ et qu'il y a deux constantes m_a, M_a telles que $0<m_a<M_a<\infty$ et que

$$\beta(m',m'') = 0 \quad \text{si } m'+m''\geq M_a, \qquad \operatorname{supp} g_0\subset[m_a,M_a].$$

Du point de vue du modèle du phénomène physique, $\overline{\pi}_{vs}$ représenterait la densité de la vapeur saturée (qui dépend sensiblement de la température), $s(m)(\pi - \overline{\pi}_{vs})$ la quantité de la condensation ou évaporation de la vapeur d'eau sur les gouttelettes d'eau de masse m (exprimée par rapport à l'unité de masse) et donc $H_{gl}(\pi,\sigma)$ serait la quantité totale de la condensation ou évaporation; $g_1(m)[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^-$ devrait représenter le taux de disparition de gouttelettes de masse m (avec m proche de m_a), tandis que $g_0(m)\tilde{P}(\sigma)[\pi - \overline{\pi}_{vs}]^+$ serait le taux de création de gouttelettes de masse m; la fonction $\beta(m,m')$ désigne le taux de coagulation d'une gouttelette de masse m et d'une de masse m' (pour les détails du modèle, voir [SEL 11]).

Nous considérons le système (2.1)–(2.3) avec les conditions initiales

$$\varrho(0,\cdot) = \varrho_0 \in W^1_\infty(\Omega), \quad \varrho_0 \geq 0, \tag{2.4}$$

$$\pi(0,\cdot) = \pi_0 \in W^1_\infty(\Omega), \quad \pi_0 \geq 0, \tag{2.5}$$

$$\sigma(0,\cdot) = \sigma_0 \in W^1_\infty(\Omega^+), \quad \sigma_0 \geq 0, \quad \operatorname{supp} \sigma_0(x,\cdot) \subset [m_a, M_a]\ \forall x \in \Omega, \tag{2.6}$$

et les conditions d'entrée

$$\varrho|_{\Gamma^{(v)}_-(t)} = \varrho_1, \quad \varrho_1 \geq 0, \tag{2.7}$$

$$\pi|_{\Gamma^{(v)}_-(t)} = \pi_1, \quad \pi_1 \geq 0, \tag{2.8}$$

$$\sigma|_{\widetilde{\Gamma}^{(w)}_-(t)} = \sigma_1, \quad \sigma_1 \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\operatorname{supp} \sigma_1(t,\cdot,\cdot) \subset \partial\Omega \times [m_a, M_a] \ \ \forall t \in [0,\overline{t}],$$

où $\Gamma^{(v)}_-(t) = \{x \in \partial\Omega \mid n_x \cdot v(t,x) < 0\}$, $\widetilde{\Gamma}^{(w)}_-(t) = \{(x,m) \in \partial\Omega \times]0,\infty[\mid n_x \cdot w(t,x,m) < 0\}$. On suppose que les conditions A, B, (1.16), (1.17) et (1.18) sont vérifiées pour $u_1 = \varrho_1$ et $u_1 = \pi_1$ en remplaçant $\Gamma_-(t)$ par $\Gamma^{(v)}_-(t)$ et pour $u_1 = \sigma_1$ en remplaçant v par w et $\Gamma_-(t)$ par $\widetilde{\Gamma}^{(w)}_-(t)$ (et avec des modifications formelles évidentes comme dans le corollaire

1.6.2). On suppose aussi que

$$v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^3)), \qquad \nabla\cdot v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \tag{2.10}$$

$$w \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega^+;\mathbb{R}^3)), \qquad \nabla\cdot w \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega^+)). \tag{2.11}$$

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothèses posées ci-dessus, il existe un* $t^* \in]0,\bar{t}]$ *tel que le système d'équations* (2.1)–(2.3) *avec les conditions initiales* (2.4)–(2.6) *et les conditions d'entrée* (2.7)–(2.9) *admette dans l'intervalle de temps* $[0,t^*]$ *une solution* (ϱ,π,σ) *et une seule telle que*

$$\varrho,\pi \in L^\infty(0,t^*; W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,t^*; L^\infty(\Omega)),$$

$$\sigma \in L^\infty(0,t^*; W^1_\infty(\Omega^+)) \cap W^1_q(0,t^*; L^\infty(\Omega^+));$$

et on a $\varrho \geq 0$, $\pi \geq 0$, $\sigma \geq 0$ *et*

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \qquad \forall (t,x) \in [0,t^*]\times\Omega.$$

2.2 Étude du système des équations linéarisées

L'équation (2.1) étant linéaire, l'existence et l'unicité de la solution résultent du lemme 2.2.1 montré ci-dessous. En ce qui concerne les équations non linéaires (2.2) et (2.3), on examine d'abord les équations linéarisées et puis on cherche un point fixe d'un opérateur défini par la solution de ces équations.

On considère deux fonctions données $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ et le système des équations

$$\partial_t \varrho + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \tag{2.12}$$

$$\partial_t \pi + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(\pi, \overline{\sigma}), \tag{2.13}$$

$$\partial_t \sigma + \nabla \cdot (\sigma w) + \partial_m (m h_{gl}(\overline{\pi})\sigma) + S_0(\overline{\pi}, \overline{\sigma})\sigma = S_1(\overline{\pi}, \overline{\sigma}), \tag{2.14}$$

qui est le système linéarisé de (2.1)–(2.3).

Lemme 2.2.1. *Si $\overline{\pi} \in L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))$ et $\overline{\sigma} \in L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+))$, alors il existe une solution (ϱ, π, σ) et une seule du système (2.12)–(2.14) avec les conditions initiales (2.4)–(2.6) et les conditions d'entrée (2.7)–(2.9), solution dans la classe*

$$\varrho, \pi \in L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,\overline{t}; L^\infty(\Omega)),$$

$$\sigma \in L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+)) \cap W^1_q(0,\overline{t}; L^\infty(\Omega^+));$$

de plus, si $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ sont non négatives, alors ϱ, π et σ sont aussi non négatives. En outre, il existe une constante $C > 0$ indépendante de v, w telle que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\|\varrho\|_{L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))} \leq \max\big(A_\varrho, \sup_{0\leq s\leq \overline{t}} \mathrm{ess} B_\varrho(s)\big), \tag{2.15}$$

$$\|\pi\|_{L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))} \leq \max\big(A_\pi, \sup_{0\leq s\leq \overline{t}} \mathrm{ess} B_\pi(s)\big), \tag{2.16}$$

$$\|\sigma\|_{L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+))} \leq \max\big(A_\sigma, \sup_{0\leq s\leq \overline{t}} \mathrm{ess} B_\sigma(s)\big), \tag{2.17}$$

où

$$A_\varrho = e^{\overline{t}^{\frac{q-1}{q}} \left(\|Dv\|_{L^q(0,\overline{t}; L^\infty(\Omega))} + \|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))}\right)} \|\varrho_0\|_{W^1_\infty(\Omega)},$$

$$B_\varrho(s) = e^{(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}} \left(\|Dv\|_{L^q(s,\overline{t}; L^\infty(\Omega))} + \|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))}\right)} \|\varrho_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma^{(v)}_-(s))},$$

$$A_\pi = e^{\overline{t}^{\frac{q-1}{q}} \left(\|Dv\|_{L^q(0,\overline{t}; L^\infty(\Omega))} + \|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))}\right)} \times$$

$$\times e^{C\overline{t}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+))}} [\|\pi_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + C\overline{t}^{\frac{q-1}{q}} \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega))} \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\overline{t}; W^1_\infty(\Omega^+))}],$$

$$B_\pi(s) = e^{(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dv\|_{L^q(s,\bar t;L^\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\right)+C(\bar t-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}}\times$$

$$\times[\|\pi_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma^{(v)}_-(s))} + C(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}],$$

$$A_\sigma = e^{\bar t^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dw\|_{L^q(0,\bar t;L^\infty(\Omega^+))}+\|\nabla\cdot w\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}+C\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\right)}\times$$

$$\times e^{C\bar t\left(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}\right)}[\|\sigma_0\|_{W^1_\infty(\Omega^+)} + C\big((\bar t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+$$

$$+\bar t\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega))} + \bar t\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))})(1 + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))})\big)],$$

$$B_\sigma(s) = e^{(\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\left(\|Dw\|_{L^q(s,\bar t;L^\infty(\Omega^+))}+\|\nabla\cdot w\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}+C\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}\right)}\times$$

$$\times e^{C(\bar t-s)\left(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))}\right)}[\|\sigma_1(s)\|_{W^1_\infty(\tilde\Gamma^{(w)}_-(s))}+$$

$$+C\big(((\bar t - s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))} + (\bar t - s)\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega))}+$$

$$+(\bar t - s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))})(1 + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\bar t;W^1_\infty(\Omega^+))})\big)].$$

De plus, si on a

$$\operatorname{supp}\overline{\sigma}(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \quad \textit{pour tout}\ (t,x) \in [0,\bar t] \times \Omega$$

alors

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \quad \textit{pour tout}\ (t,x) \in [0,\bar t] \times \Omega.$$

Démonstration. On considère l'équation (2.1) avec la condition initiale (2.4) et la condition d'entrée (2.7) ; afin d'appliquer le théorème 1.3.1 on prend

$$u = \varrho, \quad u_0 = \varrho_0, \quad u_1 = \varrho_1, \quad f = 0, \quad g = 0;$$

d'après l'inégalité (1.19) on obtient l'inégalité (2.15).

On considère maintenant l'équation (2.2) avec la condition initiale (2.5) et la condi-

tion d'entrée (2.8) ; pour appliquer le théorème 1.3.1 on prend

$$u = \pi, \quad u_0 = \pi_0, \quad u_1 = \pi_1,$$

$$g = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}(m)dm, \quad f = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}(m)dm.$$

En vertu des conditions posées sur $\overline{\pi}_{vs}$ et $s(m)$, on voit qu'il existe une constante positive c_1 telle que

$$\|g\|_{W^1_\infty(\Omega)} \leq c_1\|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}$$

et

$$\|f\|_{W^1_\infty(\Omega)} \leq c_1\|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)}\|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a, pour $0 \leq s < \overline{t}$,

$$(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|g\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))} \leq C(\overline{t}-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))}$$

et

$$(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))} \leq C(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))}\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))}$$

avec une constante C. Donc, d'après l'inégalité (1.19), on obtient (2.16).

On considère maintenant l'équation (2.3) avec la condition initiale (2.6) et la condition d'entrée (2.9) et on prend

$$u = \sigma, \quad u_0 = \sigma_0, \quad u_1 = \sigma_1, \quad v = w, \quad v_m = mh_{gl}(\overline{\pi}),$$

$$g = -S_0(\overline{\pi},\overline{\sigma}), \quad f = S_1(\overline{\pi},\overline{\sigma}).$$

En vertu des conditions posées sur $\overline{\pi}_{vs}$, $s(m)$, g_0, g_1, β, $\widetilde{P}$, on constate qu'il existe une constante positive c_2 telle que

$$\|g\|_{W^1_\infty(\Omega^+)} \leq c_2(\|\overline{\pi}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}),$$

$$\|f\|_{W^1_\infty(\Omega^+)} \leq c_2(\|\overline{\pi}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\pi}_{vs}\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)})(1 + \|\overline{\sigma}\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}).$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|g\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))} \leq C\big((\overline{t}-s)(\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))} + \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))})+$$

$$+(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))}\big)$$

et

$$(\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))} \leq C\big((\overline{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))} + (\overline{t}-s)\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega))}+$$

$$+(\overline{t}-s)\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))}\big)\big(1+\|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(s,\overline{t};W^1_\infty(\Omega^+))}\big)$$

avec une constante C. D'après le corollaire 1.6.2, on en déduit (2.17).

Pour la dernière assertion du lemme, on remarque que, si $\operatorname{supp}\overline{\sigma}(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a]$ pour tout $(t,x) \in [0,\overline{t}] \times \Omega$, alors $\operatorname{supp} f(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a]$ pour tout $(t,x) \in [0,\overline{t}] \times \Omega$, donc le résultat découle immédiatement en appliquant le corollaire 1.6.2. □

Pour utiliser le lemme 2.2.1 pour la démonstration du théorème 2.1.1, nous introduisons

$$\Lambda_{[\pi]}(t) = 2\max\big(\|\pi_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}, \sup_{0\leq s\leq t} \operatorname{ess}\|\pi_1\|_{W^1_\infty(\Gamma^{(v)}_-(s))}\big)+1, \tag{2.18}$$

$$\Lambda_{[\sigma]}(t) = 2\max(\|\sigma_0\|_{W^1_\infty(\Omega^+)}, \sup_{0\leq s\leq t} \operatorname{ess}\|\sigma_1\|_{W^1_\infty(\tilde{\Gamma}^{(w)}_-(t))})+1. \tag{2.19}$$

Alors on a le lemme suivant.

Lemme 2.2.2. *Il existe un $t_1 \in]0,\overline{t}]$ tel que, si $\overline{\pi}$ et $\overline{\sigma}$ appartiennent à $L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))$ et $L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))$ respectivement, sont non-négatives et vérifient les inégalités*

$$\|\overline{\pi}\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))} \leq \Lambda_{[\pi]}(t_1), \qquad \|\overline{\sigma}\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))} \leq \Lambda_{[\sigma]}(t_1), \tag{2.20}$$

alors la solution (ϱ,π,σ) du système (2.12)–(2.14) avec les conditions initiales (2.4)–

(2.6) *et les conditions d'entrée* (2.7)–(2.9) *vérifie les inégalités*

$$\|\pi\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega))} \leq \Lambda_{[\pi]}(t_1), \qquad \|\sigma\|_{L^\infty(0,t_1;W^1_\infty(\Omega^+))} \leq \Lambda_{[\sigma]}(t_1) \tag{2.21}$$

et on a

$$\operatorname{supp}\sigma(t,x,\cdot) \subseteq [m_a, M_a] \quad \forall (t,x) \in [0,t_1]\times\Omega. \tag{2.22}$$

Démonstration. On voit que, si on choisit $\bar{t}$ suffisamment petit, dans (2.16) et (2.17) le deuxième membre peut être inférieur à $\Lambda_{[\pi]}(\bar{t})$ et à $\Lambda_{[\sigma]}(\bar{t})$ respectivement, ce qui nous permet de déduire (2.21) sous la condition (2.20). La relation (2.22) découle immédiatement du lemme 2.2.1. □

2.3 Démonstration du théorème 2.1.1

Soit $t \in]0,t_1]$, où t_1 est donné dans le lemme 2.2.2. Nous définissons le sous-ensemble F_t de $L^\infty(]0,t]\times\Omega)\times L^\infty(]0,t]\times\Omega^+)$ par la relation : $(\pi,\sigma)\in F_t$ si et seulement si (π,σ) vérifie les conditions

$$\begin{cases} \pi \in L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega)), \;\; \sigma \in L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega^+)), \\ \pi,\sigma \geq 0, \\ \operatorname{supp}\sigma(t',x,\cdot) \subseteq [m_a, M] \; \forall (t',x) \in [0,t]\times\Omega, \\ \|\pi\|_{L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega))} \leq \Lambda_{[\pi]}(t), \\ \|\sigma\|_{L^\infty(0,t;W^1_\infty(\Omega^+))} \leq \Lambda_{[\sigma]}(t). \end{cases}$$

On considère, pour tout $t \in]0,t_1]$, l'opérateur $G_t : F_t \to L^\infty(]0,\bar{t}]\times\Omega)\times L^\infty(]0,\bar{t}]\times\Omega^+)$ tel que $G_t(\bar{\pi},\bar{\sigma}) = (\pi,\sigma)$, où (π,σ) est la solution du système (2.13)–(2.14) avec les conditions initiales (2.5)–(2.6) et les conditions d'entrée (2.8)–(2.9).

En vertu du lemme 2.2.2 on a

$$G_t(F_t) \subset F_t \quad \forall t \in]0,t_1].$$

Donc, pour démontrer le théorème 2.1.1, il suffit de démontrer qu'il existe un t^*, $0 < t^* \leq t_1$, tel que l'opérateur G_{t^*} restreint à F_{t^*} soit une contraction.

Pour $i \in \{1,2\}$ on considère $(\overline{\pi}^{(i)}, \overline{\sigma}^{(i)}) \in F_t$ et $(\pi^{(i)}, \sigma^{(i)}) = G_t(\overline{\pi}^{(i)}, \overline{\sigma}^{(i)})$. Nous posons

$$\overline{\Pi} = \overline{\pi}^{(2)} - \overline{\pi}^{(1)}, \quad \overline{\Sigma} = \overline{\sigma}^{(2)} - \overline{\sigma}^{(1)},$$

$$\Pi = \pi^{(2)} - \pi^{(1)}, \quad \Sigma = \sigma^{(2)} - \sigma^{(1)}.$$

Comme $\pi^{(1)} = \pi_1 = \pi^{(2)}$ sur $\bigcup\limits_{0 \leq t \leq t_1} \left[\{t\} \times \Gamma_-^{(v)}(t)\right]$, en appliquant l'inégalité (1.58) à

$$u = \pi^{(2)}, \quad u' = \pi^{(1)}, \quad v = v', \quad u_0 = u_0' = \pi_0, \quad u_1 = u_1' = \pi_1,$$

$$g = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(2)}(m)dm, \qquad g' = -\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(1)}(m)dm,$$

$$f = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(2)}(m)dm, \qquad f' = \overline{\pi}_{vs}\int_0^\infty s(m)\overline{\sigma}^{(1)}dm,$$

on obtient, en vertu du lemme 2.2.2 et de la définition de F_t,

$$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} \leq A_\Pi, \tag{2.23}$$

où

$$A_\Pi = Ce^{t^{\frac{q-1}{q}}\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,t;L^\infty(\Omega))} + Ct\Lambda_{[\sigma]}(t)} \times \tag{2.24}$$

$$\times \|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}[t\Lambda_{[\pi]}(t) + t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}].$$

D'autre part, pour estimer Σ, utilisons les notations

$$\overline{C}_\beta = \sup_{m,m'>0}(m+m')\beta(m,m'), \quad \overline{C}_s = \|s\|_{W^1_\infty(\mathbb{R}_+)},$$

$$\overline{C}_{g_1} = \sup_{m>0} g_1(m), \quad \overline{C}_{g_0} = \sup_{m>0} g_0(m).$$

Alors, comme $\sigma^{(1)} = \sigma_1 = \sigma^{(2)}$ sur $\bigcup_{0\leq t\leq t_1} \left[\{t\} \times \widetilde{\Gamma}_{-}^{(w)}(t)\right]$, en appliquant l'inégalité (1.68) à

$$u = \sigma^{(2)}, \quad u' = \sigma^{(1)}, \quad u_0 = u'_0 = \sigma_0, \quad u_1 = u'_1 = \sigma_1,$$

$$g = S_0(\overline{\pi}^{(2)}, \overline{\sigma}^{(2)}), \quad g' = S_0(\overline{\pi}^{(1)}, \overline{\sigma}^{(1)}), \quad f = S_1(\overline{\pi}^{(2)}, \overline{\sigma}^{(2)}), \quad f' = S_1(\overline{\pi}^{(1)}, \overline{\sigma}^{(1)}),$$

$$\widetilde{v} = (w, mh_{gl}(\overline{\pi}^{(2)})), \quad \widetilde{v}' = (w, mh_{gl}(\overline{\pi}^{(1)})),$$

on obtient

$$\|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leq A_\Sigma, \tag{2.25}$$

où

$$A_\Sigma = e^{t^{\frac{q-1}{q}}\|\nabla\cdot w\|_{L^q(0,t;L^\infty(\Omega^+))} + ((2+M_a)\overline{C}_s + \overline{C}_{g_1})[t\Lambda_{[\pi]}(t) + t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}] + \overline{C}_\beta t\Lambda_{[\sigma]}(t)} \times \tag{2.26}$$

$$\times\Big\{\overline{C}_{g_0}[\overline{C}_P\|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}(t\Lambda_{[\pi]}(t) + t^{\frac{q-1}{q}}\|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^q(0,t;W^1_\infty(\Omega))}) +$$

$$+ t\overline{C}_P(\Lambda_{[\sigma]}(t) + 1)\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)}] +$$

$$+ t[(2(1+M_a)\overline{C}_s + \overline{C}_{g_1})\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + 2M_a\overline{C}_\beta\|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}]\Lambda_{[\sigma]}(t)\Big\},$$

$\overline{C}_P$ étant une constante due à l'opérateur lipschitzien $\widetilde{P}(\cdot)$.

L'estimation de Π et celle de Σ étant établies, on va raisonner séparément pour le cas $q > 1$ et le cas $q = 1$.

Dans le cas $q > 1$, des relations (2.23)–(2.26) on déduit qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leq$$

$$\leq C_1 e^{C_1(t^{\frac{q-1}{q}} + t)}(t^{\frac{q-1}{q}} + t)\left(\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\right) \qquad \forall t \in [0, t_1].$$

Donc, si on choisit $t^* \in]0, t_1]$ de telle sorte que

$$0 < C_1 e^{C_1((t^*)^{\frac{q-1}{q}} + t^*)}((t^*)^{\frac{q-1}{q}} + t^*) < 1$$

alors G_{t^*} sera une contraction.

D'autre part, si $q = 1$, on remarque que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $t^*_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\nabla \cdot v\|_{L^1(0,t^*_\varepsilon;L^\infty(\Omega))} \leq \varepsilon, \qquad \|\overline{\pi}_{vs}\|_{L^1(0,t^*_\varepsilon;W^1_\infty(\Omega))} \leq \varepsilon, \qquad \|\nabla \cdot w\|_{L^1(0,t^*_\varepsilon;L^\infty(\Omega^+))} \leq \varepsilon.$$

Cela étant, si on examine les expressions (2.24) et (2.26) de A_Π et de A_Σ, on constate qu'on peut choisir un $t^* > 0$ suffisamment petit de telle sorte que l'inégalité

$$\|\Pi\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\Sigma\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)} \leq \kappa\big(\|\overline{\Pi}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega)} + \|\overline{\Sigma}\|_{L^\infty(]0,t[\times\Omega^+)}\big)$$

soit vérifiée avec un $\kappa < 1$. Donc G_{t^*} sera une contraction.

Ainsi on a montré que dans tous les deux cas $q > 1$ et $q = 1$; il existe un $t^* > 0$ tel que G_{t^*} soit une contraction. Donc il existe le point fixe $(\pi,\sigma) \in F_{t^*}$ (unique dans F_{t^*}) pour l'opérateur G_{t^*}. En rappelant que la solution ϱ de l'équation (2.12) est donnée dans le lemme 2.2.1, on constate que (ϱ,π,σ) ainsi obtenu est une solution du système (2.1)–(2.3) avec les conditions mentionnées en haut.

La non-négativité de ϱ, de π et de σ résulte des conditions $s \geq 0$, $g_0 \geq 0$, $\widetilde{P}(\sigma) \geq 0$ pour tout $\sigma \geq 0$, comme dans le théorème 1.3.1 et le corollaire 1.6.2. □

3

Affaiblissement de la condition pour l’estimation dans W^1_∞ de la solution de l’équation de transport avec l’entrée

3.1 Introduction

DANS [ASC 14], les auteurs ont obtenu entre autres l’estimation dans W^1_∞ de la solution de l’équation linéaire, en supposant que sur la frontière du domaine la composante normale de la vitesse de transport s’annule. En suivant l’idée de cet article, mais en admettant l’entrée et la sortie à travers la frontière, dans [BAZ 18]

(voir chapitre 1), on a établi une estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport linéaire. Or, la condition sous laquelle on a démontré cette estimation était quelque peu de nature technique. En effet, en considérant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uv) = gu + f$$

avec un champ de vitesse v (g et f sont des fonctions données) dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et la condition d'entrée

$$u(t,x) = u_1(t,x)$$

pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega$ tels que $n_x \cdot v(t,x) < 0$ (n_x désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$), on a supposé l'existence d'un ε_2-voisinage de la zone $\{-\varepsilon_1 < n(x) \cdot v(t,x) < \varepsilon_1\}$ dans lequel les fonctions données sont suffisamment régulières pour avoir la solution classique.

Dans ce chapitre, nous proposons d'affaiblir cette condition posée dans [BAZ 18] pour obtenir un résultat analogue sur l'estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport linéaire avec l'entrée. Pour ce faire, nous utilisons une régularisation particulière des fonctions données et estimons la mesure de la zone où la solution du problème approché peut avoir de mauvais comportements.

Il est bon de rappeler que durant ces dernières années, l'équation de transport a été beaucoup étudiée, en particulier sur l'affaiblissement des conditions sous lesquelles on démontre l'existence d'une solution (voir par exemple [AMB 04], nous citons aussi [DIP 89] pour son importance). Même si les travaux traintant la condition d'entrée ne sont pas nombreux, le problème a été étudié dans [BAR 70], [CRI 14], [BOY 05]. L'intérêt pour l'estimation de la solution dans W^1_∞ est dû en particulier aux applications aux équations qui ne sont pas linéaires, comme il a été traité dans [ASC 14] et [BAZ 18].

3.2 Position du problème et résultat principal

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose que sa frontière $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^1$, Ω étant d'un seul côté de $\partial\Omega$, et qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in \partial\Omega$, on ait

$$x - \varepsilon n_x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \tag{3.1}$$

où n_x désigne la normale extérieure unitaire à la frontière $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$.

Sur Ω on considère le champ de vitesse $v = v(t,x)$ définissant le flux de transport. On suppose que

$$v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)), \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot v \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega)). \tag{3.3}$$

On définit

$$\Gamma_-(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v(t,x) < 0\}, \tag{3.4}$$

$$\Gamma_0(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v(t,x) = 0\}, \tag{3.5}$$

$$\Gamma_+(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v(t,x) > 0\}. \tag{3.6}$$

On pose aussi

$$\Delta_0 = \bigcup_{t \geq 0} (\{t\} \times \Gamma_0(t)). \tag{3.7}$$

Avec v et Ω introduits ci-dessus, on considère l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uv) = gu + f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{3.8}$$

où g et f sont deux fonctions données à valeurs réelles. L'équation (3.8) est envisagée avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{pour } x \in \Omega \tag{3.9}$$

et la condition d'entrée

$$u(t,x) = u_1(t,x) \quad \text{pour } (t,x) \in \bigcup_{0\le t<\infty} \big[\{t\} \times \Gamma_-(t)\big], \tag{3.10}$$

$u_0(x)$ et $u_1(t,x)$ étant des fonctions données. On suppose la condition de compatibilité

$$u_0(x) = u_1(0,x) \quad \text{pour } x \in \Gamma_-(0). \tag{3.11}$$

Pour préciser les conditions sur les données, nous introduisons les notations $\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1$ et $n_x \cdot \nabla u_1$: le symbole $\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1$ désigne le gradient de u_1 sur la variété $\Gamma_-(t)$ dans le sens naturel, tandis que $n_x \cdot \nabla u_1$ est défini par

$$n_x \cdot \nabla u_1 = \frac{1}{v \cdot n_x}\big(- v_\tau \cdot \nabla_{\Gamma_-(t)} u_1 - \partial_t u_1 - u_1 \nabla \cdot v + g u_1 + f\big) \tag{3.12}$$

avec $v_\tau = v - (v \cdot n_x) n_x$ sur $\Gamma_-(t)$.

Désignons aussi par $\gamma_{(t,x)} = \{(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))\}_{t \in I_{max}}$ la caractéristique passant par le point $(t,x) \in [0,\infty[\, \times \Omega$ se définit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt'}\gamma_0(t') = 1, \quad \frac{d}{dt'}\gamma_j(t') = v_j(\gamma(t')), \quad j = 1, \cdots, n,$$

avec la condition initiale

$$\gamma_0(t) = t, \quad \gamma_j(t) = x_j, \quad j = 1, \cdots, n;$$

où I_{max} est l'intervalle maximal d'existence de la solution.

Pour énoncer le résultat principal, nous formulons les conditions suivantes :

CONDITION A. On pose

$$V_\delta(\Delta_0) = \{(t,x) \in [-1,\infty[\, \times \Omega \,|\, \text{dist}((t,x), \Delta_0) < \delta\}, \tag{3.13}$$

$$E(V_\delta(\Delta_0)) = \{(t,x) \in [0,\infty[\times\Omega \mid \gamma_{(t,x)} \cap V_\delta(\Delta_0) \neq \emptyset\}. \tag{3.14}$$

Alors pour tout $\bar{t} > 0$ on a

$$\text{mes}(E(V_\delta(\Delta_0)) \to 0 \qquad \text{pour } \delta \to 0. \tag{3.15}$$

CONDITION B. Si $(t_0, x_0) \in \Delta_0$, alors

$$(t_0, x_0) \notin \overline{\gamma_{(t,x)}} \qquad \forall (t,x) \in [0,\infty[\times\Omega. \tag{3.16}$$

On a le théorème suivant

Théorème 3.2.1. *On suppose que les conditions A et B sont remplies et que*

$$g \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega)), \quad f \in L^q_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega)), \quad u_0 \in W^1_\infty(\Omega), \tag{3.17}$$

$$v,\ \nabla_{\Gamma_-(t)} u_1,\ f - \partial_t u_1,\ g - \nabla\cdot v \in L^\infty\Big(\bigcup_{0\le t<\bar{t}} \big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]\Big) \quad \forall \bar{t} > 0, \tag{3.18}$$

$$n_x \cdot \nabla u_1 \in L^\infty\Big(\bigcup_{0\le t<\bar{t}} \big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big]\Big) \quad \forall \bar{t} > 0, \tag{3.19}$$

$$u_1 \text{ est uniformément continue sur } \bigcup_{0\le t<\bar{t}} \big[\{t\}\times\Gamma_-(t)\big] \text{ pour tout } \bar{t} > 0 \text{ et} \tag{3.20}$$

$$\text{y admet presque partout la dérivée par rapport à } t.$$

Alors il existe une fonction $u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega))$ et une seule qui satisfait à l'équation (3.8) et aux conditions (3.9)–(3.11) et, pour tout $\bar{t} > 0$ on a

$$\|u\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} \le \max(A, \sup_{0\le s\le\bar{t}} \text{ess}\, B(s)), \tag{3.21}$$

où

$$A = e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))})} \times$$

$$\times [\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \bar{t}^{\frac{q-1}{q}} \|f\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}],$$

$$B(s) = e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^q(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + (\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}].$$

3.3 Formulation du problème approché

Pour démontrer le théorème 3.2.1, nous démontrons d'abord le résultat sous une condition un peu plus restrictive, plus précisément, au lieu de (3.2), nous allons d'abord procéder sous la condition

$$v \in L^\infty_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)), \tag{3.22}$$

Nous écrivons l'équation (3.8) dans la forme

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u + cu = f, \qquad c = \nabla\cdot v - g. \tag{3.23}$$

Nous allons considérer l'équation approchée de (3.23), en définissant l'approximation des fonctions v, c, f, u_0, u_1. Pour ce faire, on commence par prolonger les fonctions v, c, f pour $t < 0$ par

$$v(t,\cdot) = 0, \qquad c(t,\cdot) = c(-t,\cdot), \qquad f(t,\cdot) = 0.$$

On prolonge également u_1 par 0 sur $[-1,0[\times\partial\Omega$ et aussi sur $\Gamma_+(t)\cup\Gamma_0(t)$ pour chaque $t \geq 0$ (ce dernier prolongement sert seulement pour simplifier la notation).

Pour la régularisation de fonctions, nous introduisons d'abord une famille de fonctions $\{h(\varepsilon;t,x)\}_{0<\varepsilon<1}$ de classe $\mathscr{C}^1([-1,\infty[\times\Omega)$ satisfaisant aux conditions

$$h(\varepsilon;t,x) = \varepsilon \quad \text{si} \quad \text{dist}((t,x),\Delta_0) \geq 3\varepsilon, \tag{3.24}$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{dist}((t,x),\Delta_0) \le h(\varepsilon;t,x) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}((t,x),\Delta_0) \quad \text{si} \quad \mathrm{dist}((t,x),\Delta_0) < 3\varepsilon. \tag{3.25}$$

Soient $\vartheta_1(s)$ et $\xi_1(y)$ deux fonctions régularisantes canoniques ayant les supports $\{|s| \le 1\} \subset \mathbb{R}$ et $\{|y| \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$ respectivement. Pour chaque $\varepsilon > 0$ on définit

$$\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s') = \frac{1}{h(\varepsilon;t,x)}\vartheta_1(\frac{s'}{h(\varepsilon;t,x)}), \tag{3.26}$$

$$\xi^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(y') = \frac{\xi_1(\frac{y'}{h(\varepsilon;t,x)})}{\int_\Omega \xi_1(\frac{x'-x}{h(\varepsilon;t,x)})dx'}, \tag{3.27}$$

Posons

$$v^{[\varepsilon]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t-s)\xi^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(x-y)v(s,y)dyds. \tag{3.28}$$

On remarque que le choix de h (voir (3.24)–(3.25)) et la définition de $\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}$, $\xi^{[\varepsilon]}_{[t,x]}$, $v^{[\varepsilon]}$ (voir (3.26), (3.27), (3.28)) laissent invariants les ensembles $\Gamma_-(t)$, $\Gamma_0(t)$ et $\Gamma_+(t)$, c'est-à-dire, si on pose

$$\Gamma^{[\varepsilon]}_-(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v^{[\varepsilon]}(t,x) < 0\},$$

$$\Gamma^{[\varepsilon]}_0(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v^{[\varepsilon]}(t,x) = 0\},$$

$$\Gamma^{[\varepsilon]}_+(t) = \{x \in \partial\Omega \,|\, n_x \cdot v^{[\varepsilon]}(t,x) > 0\},$$

alors on a

$$\Gamma^{[\varepsilon]}_-(t) = \Gamma_-(t), \qquad \Gamma^{[\varepsilon]}_0(t) = \Gamma_0(t), \qquad \Gamma^{[\varepsilon]}_+(t) = \Gamma_+(t) \qquad \forall t \ge 0.$$

Posons aussi

$$c^{[\varepsilon]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t-s)\xi^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(x-y)c(s,y)dyds, \tag{3.29}$$

$$f^{[\varepsilon]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}}\int_\Omega \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t-s)\xi^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(x-y)f(s,y)dyds. \tag{3.30}$$

En ce qui concerne la donnée initiale u_0, nous posons

$$u_0^{[\varepsilon]}(t,x) = \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t)\int_\Omega \xi^{[\varepsilon]}_{[0,x]}(x-y)(y)u_0(y)dy. \tag{3.31}$$

D'autre part, pour définir la donnée d'entrée régularisée, nous définissons

$$\xi^{[\varepsilon]}_{\partial\Omega[t,x]}(y') = \frac{\xi_1(\frac{y'}{h(\varepsilon;t,x)})}{\int_{\partial\Omega}\xi_1(\frac{x'-x}{h(\varepsilon;t,x)})dS_{x'}}, \tag{3.32}$$

où $dS_{x'}$ est l'élément d'intégration sur $\partial\Omega$. Avec ceci on définit

$$u_1^{[\varepsilon]}(t,x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\partial\Omega}\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t-s)\xi^{[\varepsilon]}_{\partial\Omega[t,x]}(x-y)u_1(s,y)dS_y ds. \tag{3.33}$$

Maintenant nous pouvons formuler le problème approché : trouver la fonction $u(t,x)$ qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^{[\varepsilon]}\cdot\nabla u + c^{[\varepsilon]}u = f^{[\varepsilon]} + u_0^{[\varepsilon]} \qquad \text{dans } [-1,\infty[\times\Omega, \tag{3.34}$$

avec la condition initiale

$$u(-1,\cdot) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.35}$$

et la condition d'entrée

$$u = u_1^{[\varepsilon]} \qquad \text{sur } \{(t,x)\in[-1,\infty[\times\partial\Omega \mid x\in\Gamma^\varepsilon_-(t)\}. \tag{3.36}$$

3.4 Solution du problème approché et ses estimations

Rappelons d'abord l'existence et l'unicité de la solution du problème approché.

Lemme 3.4.1. *Le problème* (3.34)–(3.36) *admet une solution u et une seule.*

Démonstration. Comme la fonction $v^{[\varepsilon]}$ est régulière, en considérant les caractéris-

tiques $\gamma^{[\varepsilon]}(t) = \gamma^{[\varepsilon]}(t_0, x_0; t)$ définies par l'équation

$$\gamma^{[\varepsilon]}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v^{[\varepsilon]}(s, \gamma^{[\varepsilon]}(s))ds, \tag{3.37}$$

avec

$$(t_0, x_0) \in (\{-1\} \times \Omega) \cup \Big(\bigcup_{t \geq -1} (\{t\} \times \Gamma_-^{[\varepsilon]}(t)) \Big) \equiv \Sigma_-^*,$$

on peut obtenir la solution u par la résolution de l'équation

$$\frac{d}{dt} u(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t)) = -(\nabla \cdot v^{[\varepsilon]}(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t)))u(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t)) + \tag{3.38}$$

$$+ g^{[\varepsilon]}(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t))u(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t)) + f^{[\varepsilon]}(t, \gamma^{[\varepsilon]}(t)),$$

avec la condition initiale

$$u(t_0, \gamma^{[\varepsilon]}(t_0)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (t_0, \gamma^{[\varepsilon]}(t_0)) \in \{-1\} \times \Omega \\ u_1^{[\varepsilon]}(t_0, \gamma^{[\varepsilon]}(t_0)) & \text{si} \quad (t_0, \gamma^{[\varepsilon]}(t_0)) \in \bigcup_{t>-1} (\{t\} \times \Gamma_-^{[\varepsilon]}(t)) \end{cases}.$$

□

Pour chaque $\bar{t} > 0$ on définit

$$A_{\delta,\bar{t}} = \{ (t, x) \in [-1, \bar{t}] \times \Omega \,|\, \Big(\bigcup_{0<\varepsilon\leq\frac{\delta}{3}} G(t, x; \gamma^{[\varepsilon]}) \Big) \cap V_\delta(\Delta_0) \neq \emptyset \}, \tag{3.39}$$

où $G(t, x; \gamma^{[\varepsilon]})$ est la restriction à $[-1, \bar{t}] \times \Omega$ de la caractéristique $\gamma^{[\varepsilon]}(t_0, x_0; \cdot)$ telle que $\gamma^{[\varepsilon]}(t_0, x_0; t) = x$ (avec un certain $(t_0, x_0) \in \Sigma_-^*$).

Rappelons une conséquence immédiate de la définition de $A_{\delta,\bar{t}}$. Pour cela, désignons par $\gamma^{[\varepsilon]}_{(t,x)}$ la caractéristique définie par $v^{[\varepsilon]}$ et passant par (t, x).

Lemme 3.4.2. *Si* $(t, x) \in ([-1, \bar{t}] \times \Omega) \setminus A_{\delta,\bar{t}}$ *et si* $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{3}$, *alors on a*

$$h(\varepsilon; t', x') = \varepsilon \quad \forall (t', x') \in \gamma^{[\varepsilon]}_{(t,x)}, \tag{3.40}$$

où $h(\varepsilon; t', x')$ est la fonction introduite dans (3.24) -(3.25).

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition de $A_{\delta,\bar{t}}$. □

On va estimer la solution u du problème (3.34)–(3.36) et ses dérivées par rapport à $x = (x_1, \cdots, x_n)$ sur les caractéristiques. Pour cela, nous suivons le même raisonnement que le lemme 5.1 de [BAZ 18], et nous limitons toutefois aux estimations sur $([-1, \bar{t}] \times \Omega) \setminus A_{\delta,\bar{t}}$. Cette limitation et le lemme 3.4.2 nous permettent d'épargner l'estimation des valeurs de $|u|$ et de $|\nabla u|$ influencées par la régularisation particulière dans le voisinage de Δ_0 (voir (3.25), (3.26), (3.27)).

Comme dans [BAZ 18], définissons d'abord la fonction auxilière

$$\lambda_\varepsilon(s) = \int_{-1}^{s} \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(t')\,dt', \qquad \operatorname{dist}((t,x), \Delta_0) \geq 3\varepsilon. \tag{3.41}$$

Lemme 3.4.3. *Soit $\gamma = \gamma^{[\varepsilon]}$ une caractéristique définie par* (3.37) *avec le point de départ $(t_0, x_0) \in \Sigma^*_-$. Alors on a, pour tout $t > t_0$,*

$$\int_{t_0}^{t} |u_0^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|\,dt' \leq (1 - \lambda_\varepsilon(t_0))\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.42}$$

$$|u_1^{[\varepsilon]}(t_0, x)| \leq \lambda_\varepsilon(t_0)\|u_1\|_{L^\infty([[t_0-\varepsilon]^+, [t_0+\varepsilon]^+] \times \partial\Omega)}. \tag{3.43}$$

où $[\tau]^+ = \max(\tau, 0)$ *(ici u_1 se considère prolongée par* 0 *pour* $(t, x) \in [-1, \infty[\times \partial\Omega$ *tels que $x \notin \Gamma_-(t)$).*

Démonstration. On le démontre de la même manière que le lemme 4.1 de [BAZ 18]. □

Lemme 3.4.4. *Sur chaque caractéristique* $\gamma = \gamma^{[\varepsilon]}$ *ayant le point de départ* $(t_0, x_0) \in \Sigma^*_-$ *et telle que* $\gamma\big|_{[-1,\bar t]} \cap A_{\delta,\bar t} = \emptyset$, *la solution u du problème approché* (3.34)–(3.36) *vérifie, pour* $t \in [t_0, \bar t]$ *avec* $(t, \gamma(t)) \in \gamma$, *les inégalités*

$$|u(\gamma(t))| \le \Big(\lambda_\varepsilon(t_0)\|u_1\|_{L^\infty([[t_0-\varepsilon]^+,[t_0+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + \tag{3.44}$$

$$+\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) e^{\int_{\max(-\varepsilon,t_0)}^{t} |c^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|dt'} + \int_{\max(-\varepsilon,t_0)}^{t} |f^{[\varepsilon]}(t')| e^{\int_{t'}^{t} |c^{[\varepsilon]}(\gamma(t''))|dt''} dt',$$

$$|\nabla u(\gamma(t))| \le \Big(\lambda_\varepsilon(t_0)\|\nabla u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[t_0+\varepsilon]^+]\times\partial\Omega)} + \tag{3.45}$$

$$+(1-\lambda_\varepsilon(t_0))\|\nabla u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) e^{\int_{\max(-\varepsilon,t_0)}^{t} \omega_\varepsilon(\gamma(t'))dt'} +$$

$$+ \int_{\max(-\varepsilon,t_0)}^{t} \big(|\nabla f^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))| + |u(\gamma(t'))||\nabla c^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|\big) e^{\int_{t'}^{t} \omega_\varepsilon(\gamma(t''))dt''} dt'.$$

où

$$\omega_\varepsilon = \max_{i,j=1,\cdots,n} |\delta_{ij} c^{[\varepsilon]} + \partial_{x_i} v_j^{[\varepsilon]}|, \qquad \|\nabla u_1\|_{L^\infty} = \|\nabla_{\Gamma_-(t)} u_1\|_{L^\infty} + \|n_x \cdot \nabla u_1\|_{L^\infty}$$

(pour cette dernière notation, rappeler (3.12)*).*

Démonstration. On le démontre de la même manière que le lemme 5.1 de [Baz 18]. (Par rapport au lemme 5.1 de [Baz 18], ce présent lemme est plus simple. Car ici, nous considérons seulement les caractéristiques contenues dans $([0,\bar t] \times \Omega) \setminus A_{\delta,\bar t}$ de sorte que l'opérateur régularisant reste invariant (voir (3.40)) et donc les termes dûs à la variation du noyau de l'opérateur régularisant disparaît.) □

3.5 Estimation sous la condition de la régularité de v de type L^∞

Dans cette section, nous allons établir l'estimation de la solution u dans $L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))$ sous l'hypothèse de l'appartenance de v à $L^\infty_{loc}(0,\infty;W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n))$ (condition (3.22)).

Lemme 3.5.1. *Désignons par $u^{[\varepsilon]}$ la solution u du problème approché (3.34)–(3.36) avec $\varepsilon \in]0,1]$. Soit $\bar{t} > 0$. Pour chaque $\delta > 0$ fixé, les solutions approchées $u^{[\varepsilon]}$ convergent vers une fonction u dans $([0,\bar{t}]\times\Omega)\setminus A_{\delta,\bar{t}}$ pour $\varepsilon \to 0$ et u satisfait à l'inégalité*

$$\sup_{0\le s\le \bar{t}} \mathrm{ess}\|u\|_{W^1_\infty(D_{\delta,t})} \le \max(A, \sup_{0\le s\le \bar{t}} \mathrm{ess}\, B(s)), \tag{3.46}$$

où

$$A = e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^\infty(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}],$$

$$B(s) = e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^\infty(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + (\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}];$$

dans cette expression

$$D_{\delta,t} = \{x\in\Omega \,|\, (t,x)\not\in A_{\delta,\bar{t}}\},$$

$$\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} =$$

$$= \|u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} + \|\nabla_{\Gamma_-(s)}u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))} + \|n_x\cdot u_1(s)\|_{L^\infty(\Gamma_-(s))}.$$

Dans le cas où $q=\infty$, on remplace $\frac{q-1}{q}$ par 1. De plus, si f, u_0 et u_1 sont non-négatives, u est aussi non-négative.

Démonstration. Pour démontrer (3.46), nous procédons par les estimations de $|u^{[\varepsilon]}(t,x)|$

et de $|\nabla u^{[\varepsilon]}(t,x)|$ sur les caratéristiques $\gamma = \gamma^{[\varepsilon]}$ définies par $v^{[\varepsilon]}$. Or, comme toutes les caractéristiques $\gamma^{[\varepsilon]}$ avec $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{3}$ passant par $D_{\delta,t}$ ne rencontrent pas $A_{\delta,\bar{t}}$ (voir (3.13)–(3.39), voir aussi le lemme 3.4.2), on prend en considération l'inégalité (3.44). Cela étant, de la même manière que dans la démonstration du théorème 3.1 de [BAZ 18] (plus précisément, la déduction de (6.4) à partir de (5.1)–(5.2) dans [BAZ 18]) on déduit de (3.44) l'inégalité

$$|u^{[\varepsilon]}(\gamma(t))| + |\nabla u^{[\varepsilon]}(\gamma(t))| \leq e^{\int_{s_\varepsilon}^{t}(|\nabla c^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|+|c^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|+|Dv^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|)dt'} \times \tag{3.47}$$

$$\times\Big(e^{\nu_1(\varepsilon)}\big[\lambda_\varepsilon(s)\|u_1\|_{L^\infty([[s-\varepsilon]^+,[s+\varepsilon]^+];W^1_\infty(\partial\Omega))} + (1-\lambda_\varepsilon(s))\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)}\big] +$$

$$+\int_{s_\varepsilon}^{t}(|f^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))| + |\nabla f^{[\varepsilon]}(\gamma(t'))|)dt'\Big) + \nu_2(\varepsilon),$$

où $\nu_1(\cdot)$ et $\nu_2(\cdot)$ sont deux fonctions continues définies sur $[0,1]$, telles que $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$.

Compte tenu de la relation $\lambda_\varepsilon(s)\alpha + (1-\lambda_\varepsilon(s))\beta \leq \max(\alpha,\beta)$ pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et des définitions de $v^{[\varepsilon]}$, $c^{[\varepsilon]}$, $f^{[\varepsilon]}$, on déduit que le second membre de (3.47) est majoré par

$$e^{\nu_1(\varepsilon)}\max(\widetilde{A}(t), \sup_{0\leq s\leq t}\mathrm{ess}\widetilde{B}(t;s)) + \nu_2(\varepsilon), \tag{3.48}$$

où

$$\widetilde{A}(t) = e^{\int_0^t(\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\Big(\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}dt'\Big),$$

$$\widetilde{B}(t;s) = e^{\int_s^t(\|c(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}+\|Dv(t')\|_{L^\infty(\Omega)})dt'}\Big(\|u_1\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + \int_s^t \|f(t')\|_{W^1_\infty(\Omega)}dt'\Big).$$

Cela étant, on remarque que $\{u^{[\varepsilon]}\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))$, ce qui, en vertu de (3.34), implique que $\{\partial_t u^{[\varepsilon]}\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))$. Par conséquent, il existe une suite $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ et une fonction $u \in L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega)) \cap W^1_q(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))$ telles que $\varepsilon_j \to 0$ pour $j \to \infty$, $u^{[\varepsilon_j]}$ et $\nabla u^{[\varepsilon_j]}$ convergent faiblement-$*$ vers u et ∇u dans $L^\infty(([0,\bar{t}]\times\Omega)\setminus A_{\delta,\bar{t}})$ et $\partial_t u^{[\varepsilon_j]}$ converge

faiblement vers $\partial_t u$ dans $L^q(0,\bar{t};L^\infty(D_{\delta,t}))$ (dans le cas $q=1$, en établissant d'abord (1.54), on peut procéder de manière analogue à la démonstration du point (b) du lemme 4.4 de [Asc 14]). Donc, en faisant tendre ε_j vers 0 dans (3.48), on obtient

$$\|u(t)\|_{W_\infty^1(\Omega)} \le \max(\widetilde{A}(t), \sup_{0\le s\le t} \operatorname{ess}\widetilde{B}(t;s)). \tag{3.49}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder aux intégrales dans l'expression de $\widetilde{A}$ et de $\widetilde{B}$ et en rappelant la définition de $c(t)$, on parvient à (3.46).

De plus, $u^{[\varepsilon_j]}$ vérifie, pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^1(([-1,\bar{t}]\times\overline{\Omega})\setminus A_{\delta,\bar{t}})$ telle que

$$\varphi(t,x)=0 \quad \text{sur} \quad \partial(([-1,\bar{t}]\times\overline{\Omega})\setminus A_{\delta,\bar{t}})\setminus\Big(\bigcup_{0<t\le\bar{t}}(\{t\}\times\Gamma_-(t))\Big),$$

l'égalité

$$\int_{-1}^{\bar{t}} dt \int_\Omega [u^{[\varepsilon_j]}(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v^{[\varepsilon_j]}\cdot\nabla\varphi+(\nabla\cdot v^{[\varepsilon_j]})\varphi-c^{[\varepsilon_j]}\varphi)+f^{[\varepsilon_j]}\varphi+u_0^{[\varepsilon_j]}(t)\varphi]dx=$$

$$=\int_{-1}^{\bar{t}}\int_{\partial\Omega}(v^{[\varepsilon_j]}\cdot n_x)u_1^{[\varepsilon_j]}\varphi(t,x)\,dt\,dS.$$

En passant à la limite pour $\varepsilon_j\to 0$, on a

$$\int_0^{\bar{t}} dt\int_\Omega [u(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\cdot\nabla\varphi+g\varphi)+f\varphi]dx=\int_0^{\bar{t}}\int_{\Gamma_-(t)}(v\cdot n)u_1\varphi\,dS\,dt-\int_\Omega u_0\varphi(0,x)dx. \tag{3.50}$$

Comme dans (1.54), φ est arbitraire dans la classe indiquée, on peut affirmer que u vérifie l'équation (3.8) et les conditions (3.9)–(3.10) presque partout dans $([0,\bar{t}]\times\Omega)\setminus A_{\delta,\bar{t}}$.

□

Maintenant nous voulons montrer que la mesure de $A_{\delta,\bar{t}}$ tend vers 0 quand δ tend vers 0. Pour ce faire, nous allons d'abord estimer la différence entre $\gamma^{[\varepsilon]}(t_0,x_0;t)$ et $\gamma(t_0,x_0;t)$.

Lemme 3.5.2. *On a*

$$|\gamma^{[\varepsilon]}(t_0,x_0;t)-\gamma(t_0,x_0;t)| \leq (2+\sup|v|)\varepsilon L\big(t-t_0+L\int_{t_0}^{t}(s-t_0)e^{L(t-s)}ds\big)+R(\varepsilon), \quad (3.51)$$

où $R(\varepsilon)$ *tend vers* 0 *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Avant de démontrer ce lemme, en désignant par $\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}$ les caractéristiques définies par $v^{[\varepsilon]}_{[t]}$, c'est-à-dire,

$$\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds,$$

$$v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v(s',\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds',$$

et on donne l'estimation suivante

Lemme 3.5.3. *On a*

$$|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t)-\gamma(t_0,x_0;t)| \leq \varepsilon L\sup|v|\big(t-t_0+L\int_{t_0}^{t}(s-t_0)e^{L(t-s)}ds\big)+R(\varepsilon) \qquad (3.52)$$

Démonstration. On a

$$|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t)-\gamma(t_0,x_0;t)| = |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))-v(s,\gamma(s)))ds|$$

$$\leq |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))-v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds|+|\int_{t_0}^{t}(v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))-v(s,\gamma(s)))ds|$$

$$\leq |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))-v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds|+L\int_{t_0}^{t}|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)-\gamma(s)|ds$$

Maintenant, examinons la différence intgrale

$$\int_{t_0}^{t} (v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds.$$

En supposant que $v(s,x)$ est bien définie aussi pour $s \in [t_0-\varepsilon, t_0]$. On a donc

$$\int_{t_0}^{t} v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds = \int_{t_0}^{t}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v(s',\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds.$$

$$= \int_{t_0-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee t_0}^{(s+\varepsilon)\wedge t} v(s',\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')dsds',$$

où $a \vee b = \max(a,b)$ et $a \wedge b = \min(a,b)$. Dans la dernière intégrale, nous pouvons remplacer s par s' et en même temps s' par s. Donc, compte tenu de la relation

$$\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s') = \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s'-s),$$

on a

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee t_0}^{(s+\varepsilon)\wedge t} v(s',\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')dsds' =$$

$$= \int_{t_0-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee t_0}^{(s+\varepsilon)\wedge t} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s'))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds.$$

On a donc

$$\int_{t_0}^{t} v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds = \int_{t_0+\varepsilon}^{t-\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s'))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds + R_1(\varepsilon) + R_2(\varepsilon),$$

où

$$R_1(\varepsilon) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\int_{(s-\varepsilon)\vee t_0}^{s+\varepsilon} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s'))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds,$$

$$R_2(\varepsilon) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{(s+\varepsilon)\wedge t} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s'))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds.$$

D'autre part, comme

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds' = 1,$$

on a

$$\int_{t_0}^{t} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds = \int_{t_0}^{t}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds =$$

$$= \int_{t_0+\varepsilon}^{t-\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds + R_3(\varepsilon)+R_4(\varepsilon),$$

où

$$R_3(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds, \qquad R_4(\varepsilon) = \int_{t-\varepsilon}^{t} v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))ds.$$

Des égalités établies ci-dessus, on obtient

$$\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds = \tag{3.53}$$

$$= \int_{t_0+\varepsilon}^{t-\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}(v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s')) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds+$$

$$+R_1(\varepsilon)+R_2(\varepsilon)-R_3(\varepsilon)+R_4(\varepsilon).$$

On va examiner la différence intgrale du second membre de (3.53). On remarque d'abord que

$$|v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s')) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))| \le L|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s') - \gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)|.$$

D'autre part, on a

$$|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s') - \gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)| = \left|\int_{s'}^{s} v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s'',\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s''))ds''\right| \le$$

$$\le |s-s'|\sup|v| \le \varepsilon\sup|v|.$$

Par conséquent, on a

$$|v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s')) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))| \le \varepsilon L\sup|v|,$$

ce qui nous donne

$$\left|\int_{t_0+\varepsilon}^{t-\varepsilon}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}(v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s')) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))\vartheta^{[\varepsilon]}_{[t,x]}(s-s')ds'ds\right| \le \varepsilon L(t-t_0)\sup|v|.$$

ou encore

$$|\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds| \le \varepsilon L(t-t_0)\sup|v| + R_1(\varepsilon)+R_2(\varepsilon)+R_3(\varepsilon)+R_4(\varepsilon).$$

Donc, la fonction $Z(t)=\int_{t_0}^{t}|\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)-\gamma(s)|ds$ vérifie l'inégalité

$$Z'(t) \le LZ(t) + \varepsilon L(t-t_0)\sup|v| + R_1(\varepsilon)+R_2(\varepsilon)+R_3(\varepsilon)+R_4(\varepsilon).$$

d'où

$$Z(t) \le \varepsilon L \sup|v| \int_{t_0}^{t}(s-t_0)e^{L(t-s)}ds + R'(\varepsilon)$$

où $R'(\varepsilon) = (R_1(\varepsilon)+R_2(\varepsilon)+R_3(\varepsilon)+R_4(\varepsilon))\int_{t_0}^{t} e^{L(t-s)}ds$ ce qui nous permet d'obtenir (3.52).

□

Démonstration. du lemme 3.5.2. On a

$$|\gamma^{[\varepsilon]}(t_0,x_0;t)-\gamma(t_0,x_0;t)| \le |\gamma^{[\varepsilon]}(t_0,x_0;t)-\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t)| + |\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t)-\gamma(t_0,x_0;t)|$$

On commence par l'estimation du premier terme du second membre. Comme v appartient à $L^\infty(0,\overline{t};W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n))$, il existe une constante L telle que $|v(t,x)-v(t,x')| \le L|x-x'|$ pour tout $(t,x,x')\in[0,\overline{t}]\times\Omega\times\Omega$ et ceci est valable aussi pour $v^{[\varepsilon]}$ et donc on a

$$|\gamma^{[\varepsilon]}(t_0,x_0;t)-\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(t_0,x_0;t)| = |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}(s)) - v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds|$$

$$\le |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}(s)) - v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds| + |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds|$$

$$\le L\int_{t_0}^{t}|\gamma^{[\varepsilon]}(s)-\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)|ds + |\int_{t_0}^{t}(v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)))ds|$$

Par la définition de $v^{[\varepsilon]}$ on a

$$|v^{[\varepsilon]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s)) - v^{[\varepsilon]}_{[t]}(s,\gamma^{[\varepsilon]}_{[t]}(s))| \le 2\varepsilon L$$

et donc la fonction $Y(t) = \int_{t_0}^t |\gamma^\varepsilon(s) - \gamma_{[t]}^{[\varepsilon]}(s)|ds$ vérifie l'inégalité

$$Y'(t) \le LY(t) + 2\varepsilon L(t - t_0),$$

d'où

$$Y(t) \le 2\varepsilon L \int_{t_0}^t (s - t_0)e^{L(t-s)}ds,$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$|\gamma^{[\varepsilon]}(t_0, x_0; t) - \gamma_{[t]}^{[\varepsilon]}(t_0, x_0; t)| \le 2\varepsilon L(t - t_0 + L\int_{t_0}^t (s - t_0)e^{L(t-s)}ds). \tag{3.54}$$

Des inégalités (3.52) et (3.54) on parvient à (3.51). □

Lemme 3.5.4. *On a*

$$\text{mes}(A_{\delta,\bar{t}}) \to 0 \qquad \textit{pour } \delta \to 0. \tag{3.55}$$

Démonstration. Soit $(t, x) \in A_{\delta,\bar{t}}$. Alors par la définition de $A_{\delta,\bar{t}}$, il existe un $\varepsilon \in]0, \frac{\delta}{3}[$ et un point $(t^*, x^*) \in V_\delta(\Delta_0)$ tels que $(t^*, x^*) \in \gamma_{(t,x)}^{[\varepsilon]}$.

D'après le lemme 3.5.2 on a

$$|(t, x) - \gamma_{(t^*,x^*)}(t)| \le C\varepsilon$$

où C est une constante positive. On considère la caractéristique $\gamma_{(t,x)}$, alors on a

$$|(t^*, x^*) - \gamma_{(t,x)}(t^*)| \le C\varepsilon.$$

On pose

$$\gamma_{(t,x)}(t^*) \equiv (t^*, \tilde{x})$$

Comme $(t^*, x^*) \in V_\delta(\Delta_0)$, on a

$$(t^*, \tilde{x}) \in V_{\delta+C\varepsilon}(\Delta_0)$$

on a donc

$$(t, x) \in E(V_{\delta+C\varepsilon}(\Delta_0)) \subset E(V_{\delta+C\frac{\delta}{3}}(\Delta_0))$$

ou

$$A_{\delta,\bar{t}} \subset E(V_{\delta+C\frac{\delta}{3}}(\Delta_0)). \tag{3.56}$$

La propriété (3.55) résulte de la relation (3.56) et de la condition A. □

Proposition 3.5.1. *On suppose que*

$$v \in L^\infty_{loc}(0,\infty; W^1_\infty(\Omega;\mathbb{R}^n)), \tag{3.57}$$

Soit u la solution de l'équation (3.8) *avec les conditions* (3.9)–(3.10)*. Alors sous les mêmes hypothèses complémentaires du théorème* 3.2.1*, on a*

$$\|u\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))} \leq \max(A, \sup_{0\leq s\leq \bar{t}} \operatorname{ess} B(s)), \tag{3.58}$$

où

$$A = e^{\bar{t}^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^\infty(0,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_0\|_{W^1_\infty(\Omega)} + \bar{t}^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}],$$

$$B(s) = e^{(\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}(\|g\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|\nabla\cdot v\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}+\|Dv\|_{L^\infty(s,\bar{t};L^\infty(\Omega))})}\times$$

$$\times[\|u_1(s)\|_{W^1_\infty(\Gamma_-(s))} + (\bar{t}-s)^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_{L^q(s,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}].$$

Démonstration. On remarque que l'inégalité (3.48) ne dépend pas de δ, ce qui nous permet de passer à la limite pour $\delta \to 0$, de sorte que, à l'aide du lemme 3.5.4, on obtiendra (3.58). □

3.6 Démonstration du théorème 3.2.1

Rappelons les conditions (3.2)–(3.3), selon lesquelles, quel que soit $\bar{t} > 0$, on a

$$v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)), \qquad \nabla \cdot v \in L^q(0,\bar{t}; W^1_\infty(\Omega)). \tag{3.59}$$

On introduit les champs de vecteurs approchés $v^{[n]}$ par

$$v^{[n]}(t,x) = \begin{cases} v(t,x) & \text{si } \|v(t,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)} \le n \\ n\frac{v(t,x)}{\|v(t,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)}} & \text{si } \|v(t,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)} > n \end{cases}. \tag{3.60}$$

Soit

$$(t_0, x_0) \in (\{0\} \times \Omega) \cup \left(\bigcup_{t\in[0,\bar{t}]} \{t\} \times \Gamma_-(t) \right) \equiv \Sigma_-.$$

Désignons par $\gamma(t_0, x_0; t)$ et $\gamma_n(t_0, x_0; t)$ la solution de l'équation intégrale

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(s,\gamma(s))ds,$$

et

$$\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v^{[n]}(s,\gamma_n(s))ds$$

respectivement.

D'après la proposition 3.5.1 l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (uv^{[n]}) = gu + f \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.61}$$

avec les conditions (3.9)–(3.11) admet une solution et une seule, que nous notons $u^{[n]}$. En outre, le problème (3.8) avec (3.9)–(3.11) lui aussi admet une solution, notée u, qui sera construite par la famille d'équations sur les courbes γ

$$\frac{d}{dt}u(t,\gamma(t)) = -(\nabla \cdot v(t,\gamma(t)))u(t,\gamma(t)) + g(t,\gamma(t))u(t,\gamma(t)) + f(t,\gamma(t)), \tag{3.62}$$

$$u(t_0, x_0) = \begin{cases} u_0(t_0, x_0) & \text{si } t_0 = 0 \\ u_1(t_0, x_0) & \text{si } t_0 > 0 \end{cases}, \tag{3.63}$$

où

$$\gamma(t) = \gamma(t_0, x_0; t).$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.6.1. *Les solutions $u^{[n]}$ du problème* (3.61) *avec* (3.9)–(3.11) *convergent presque partout dans* $[0, \bar{t}] \times \Omega$ *vers la solution u construite par la famille d'équations* (3.62).

Pour démontrer le lemme 3.6.1, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 3.6.2. *Pour presque tout* $(t_0, x_0) \in \Sigma_-$, *les fonctions* $\gamma_n(t_0, x_0; t)$ *convergent vers la fonction* $\gamma(t_0, x_0; t)$ *pour* $n \to \infty$.

Démonstration. On pose

$$g_n(t) = \gamma_n(t_0, x_0; t) - \gamma(t_0, x_0; t).$$

On a

$$g_n(t) = \int_{t_0}^{t} (v^{[n]}(s, \gamma_n(s)) - v(s, \gamma(s)))ds.$$

Or, on a

$$|v^{[n]}(t, \gamma_n(t)) - v(t, \gamma(t))| \le |v^{[n]}(t, \gamma_n(t)) - v^{[n]}(t, \gamma(t))| + |v^{[n]}(t, \gamma(t)) - v(t, \gamma(t))|.$$

On rappelle que, comme $v(t, x)$ est lipschitzienne par rapport à x, $v^{[n]}(t, x)$ sont elles aussi lipschitziennes et il existe une fonction $L(t)$ indépendante de n telle que

$$|v^{[n]}(t, x) - v^{[n]}(t, x')| \le L(t)|x - x'| \qquad \forall x, x' \in \Omega.$$

On a donc

$$|v^{[n]}(t,\gamma_n(t)) - v(t,\gamma(t))| \leq L(t)g_n(t).$$

D'autre part, de la définition de $v^{[n]}(t,x)$, il résulte immédiatement que

$$|v^{[n]}(t,\gamma(t)) - v(t,\gamma(t))| \leq |\gamma(t)| \max(0, \|v(t,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)} - n).$$

On a donc

$$|g_n(t)| \leq \int_{t_0}^{t} [L(s)|g_n(s)| + |\gamma(s)| \max(0, \|v(s,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)} - n)]ds,$$

d'où, de manière usuelle, il résulte que $|g_n(t)|$ tend vers 0. □

Démonstration. du lemme 3.6.1

Soit $u^{[n]}$ la solution de notre équation. On va montrer que $u^{[n]}$ convergent vers u au moins presque partout. L'idée fondamentale est d'estimer

$$|u^{[n]}(t,x) - u(t,x)|.$$

Or, (t,x) est traversé par une caractéristique, disons $\gamma = \gamma(t_0,x_0;t)$. Donc, on peut écrire $|u^{[n]}(t,x) - u(t,x)|$ dans la forme

$$|u^{[n]}(t,\gamma(t_0,x_0;t)) - u(t,\gamma(t_0,x_0;t))|.$$

On a

$$|u^{[n]}(t,\gamma(t_0,x_0;t)) - u(t,\gamma(t_0,x_0;t))| \leq$$

$$\leq |u^{[n]}(t,\gamma(t_0,x_0;t)) - u^{[n]}(t,\gamma_n(t_0,x_0;t))| + |u^{[n]}(t,\gamma_n(t_0,x_0;t)) - u(t,\gamma(t_0,x_0;t))|$$

On remarque que le terme $|u^{[n]}(t,\gamma_n(t_0,x_0;t)) - u(t,\gamma(t_0,x_0;t))|$ peut être majoré par

$$\int_s^t (|c(t',\gamma_n(t'))||u^{[n]}(t',\gamma_n(t')) - u(t',\gamma(t'))| +$$

$$+|c(t',\gamma_n(t'))-c(t',\gamma(t'))||u(t',\gamma(t'))|+|f(t',\gamma_n(t'))-f(t',\gamma(t'))|)dt',$$

en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$|u^{[n]}(t,\gamma_n(t_0,x_0;t))-u(t,\gamma(t_0,x_0;t))|\leq e^{\int_s^t |c(t',\gamma_n(t'))|dt'}\times$$

$$\times\int_s^t (|c(t',\gamma_n(t'))-c(t',\gamma(t'))||u(t',\gamma(t'))|+|f(t',\gamma_n(t'))-f(t',\gamma(t'))|)dt'$$

par conséquent

$$|u^{[n]}(t,x)-u(t,x)|\leq \|u^{[n]}(t,\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)}|\gamma(t)-\gamma_n(t)|+$$

$$+e^{\int_s^t \|c(t',\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}dt'}\int_s^t (\|c(t',\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)}|u(t',\gamma(t'))|+\|f(t',\cdot)\|_{W^1_\infty(\Omega)})|\gamma_n(t')-\gamma(t')|\,dt'.$$

D'après la proposition 3.5.1, on constate que $\|u^{[n]}\|_{L^\infty(0,\bar{t};W^1_\infty(\Omega))}$ est uniformement bornée. D'autre part, le lemme 3.6.1 garantit la convergence de $\gamma_n(t)$ à $\gamma(t)$ lorsque $n\to\infty$. Donc, on déduit que les solutions $u^{[n]}$ convergent presque partout dans $[0,\bar{t}]\times\Omega$ vers la solution u construite par la famille d'équations (3.62).

De plus, $u^{[n]}$ vérifie, pour toute $\varphi\in\mathscr{C}^1([0,\bar{t}]\times\overline{\Omega})$ telle que

$$\varphi(t,x)=0 \quad \text{sur} \quad \Big(\bigcup_{0\leq t\leq\bar{t}}(\{t\}\times\Gamma_+(t))\Big)\cup(\{\bar{t}\}\times\overline{\Omega}),$$

l'égalité

$$\int_0^{\bar{t}} dt\int_\Omega [u^{[n]}(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v^{[n]}\cdot\nabla\varphi+(\nabla\cdot v^{[n]})\varphi-c\varphi+u_0\varphi)]dx=$$

$$=\int_0^{\bar{t}}\int_{\Gamma_-(t)} u_1\varphi(t,x)dtdS.$$

En passant à la limite pour $n\to\infty$, on a

$$\int_0^{\bar{t}} dt\int_\Omega [u(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\cdot\nabla\varphi+g\varphi)+f\varphi]dx=\int_0^{\bar{t}}\int_{\Gamma_-(t)}(v\cdot n)u_1\varphi dSdt-\int_\Omega u_0\varphi(0,x)dx. \quad (3.64)$$

Donc, u vérifie l'équation (3.8) et les conditions (3.9)-(3.11) presque partout dans les domaines relatifs.

□

Démonstration du théorème 3.2.1 D'après la proposition 3.5.1, $u^{[n]}$ vérifie l'estimation (3.58). En vertu du lemme 3.6.1 et en passante à la limite lorsque $n \to \infty$, on trouve (3.21).

Conclusion et perspectives

DANS la présente thèse, nous avons considéré l'équation de transport linéaire avec la condition d'entrée. Le résultat présenté dans le chapitre 1 constitue une contributions valide à la recherche sur les équations de transport, en particulier pour l'élaboration de l'estimation dans L^∞ du gradient de la solution qui joue un rôle crucial pour l'étude des équations non linéaires. Quant à la seconde partie, qui est explorée dans le deuxième chapitre de cette thèse, est dédiée à l'application du premier résultat pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution d'un système issu d'un modèle du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau (modèle proposé dans [SEL 11]). En outre, dans le troisième chapitre, nous avons amélioré le premier résultat présenté dans le premier chapitre. Plus précisémment, nous avons affaibli les conditions posées dans le premier résultat pour obtenir un résultat analogue sur l'estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport.

Les résultats principaux de ce travail ne sont pas nécessairement optimaux dans le sens strict. Mais les nouvelles techniques développées dans notre étude nous semble suffisemment efficaces. Nous pouvons donc espérer qu'elles donneront des contributions utiles pour les futurs recherches sur les équations de transport avec l'entrée.

De point de vue d'application, nous avons réussi à résoudre le système d'équations non linéaires des densités de l'air sec, de la vapeur d'eau, de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes, système d'équations avec la condition d'entrée, ce qui constitue

la généralisation du résultat de la second partie du travail [ASC 14]. Nous pouvons donc croire que notre résultat ouvre une voie vers la résolution du système d'équations d'un modèle général du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau proposé dans [SEL 11].

Bibliographie

[AMB 04] L. AMBROSIO. « Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields ». In : *Invent. Math.* 158 (2004), p. 227–260.

[ASC 14] D. ASCOLI et S. SELVADURAY. « Wellposedness in the Lipschitz class for a quasi-linear hyperbolic system arising from a model of the atmosphere including water phase transitions ». In : *NoDEA* 21 (2014), p. 263–287.

[BAR 70] C. BARDOS. « Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d'approximation; application à l'équation de transport ». In : *Annales E.N.S. série IV* 3 (1970), p. 185–233.

[BAZ 18] I. BAZINE, D. ASCOLI et H. YASHIMA FUJITA. « Estimation dans W^1_∞ de la solution de l'équation de transport avec une condition d'entrée et application à un modèle pour l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau ». In : *Rend. Semi. Mat. Univ. Poli. Torino* 76 (2018), p. 5–31.

[BEN 18] M. BENSSAAD, H. BELHIRECHE et S. C. SELVADURAY. « Equation system describing the radiation intensity and the air motion with the water phase transition ». In : *Hokkaido Math. J.* (2018).

[BLO 70] K. BLOTEKJAER. « Transport equations for electrons in two-valley semiconductors ». In : *IEEE Trans. on Electron Devices* 17 (1970), p. 38–47.

[BOY 05] F. BOYER. « Trace theorems and spatial continuity properties for the solutions of the transport equation ». In : *Diff. Int. Eq.* 18 (2005), p. 891–934.

[CHA 50] S. CHANDRASEKHAR. *Radiative Transfer*. Oxford Univ. Press, London, 1950.

[COU 89] R. COURANT et D. HILBERT. *Methods of mathematical physics : Volume II Partial differential equations*. Wiley Classics Edition, 1989.

[CRI 14] G. CRIPPA, C. DONADELLO et L. V. SPINOLO. « Initial-boundary value problems for continuity equations with BV coefficients ». In : *J. Math. Pures Appl.* 102 (2014), p. 79–98.

[DAV 57] B. DAVISION. *Neutron transport theory*. Oxford Univ. Press, 1957.

[DIP 89] R. J. DIPERNA et P.-L. LIONS. « Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces ». In : *Invent. Math.* 98 (1989), p. 511–547.

[GOU 21] E. GOURSAT. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. 2nd ed. Hermann, Paris, 1921.

[HAR 67] F. H. HARLOW et P. I. NAKAYAMA. « Turbulence transport equations ». In : *Phys. Fluids* 10.2323 (1967).

[JOR 58] K. JORGENS. « An asymptotic expansion in the theory of neutron transport ». In : *Comm. Pure App. Math.* 11 (1958), p. 219–242.

[KOL 74] A. N. KOLMOGOROV et S. V. FOMINE. *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1974.

[MON 64] D. C. MONTGOMERY et D. A. TIDMAN. *Plasma kinetic theory.* McGrow-Hill, New York, 1964.

[OBE 67] C. OBERMAN. « Plasmas ». In : *Developments in Transport Theory.* Academic press London et New York, 1967, p. 213–241.

[PLO 12] P. PLOTNIKOV et J. SOKOLOWSKI. *Compressible Navier-Stokes equations ; theory and shape optimization.* Springer, 2012.

[REE 65] K. W. REED. « On a problem in neutron transport theory ». In : *J. Math. Anal. and App.* 10 (1965), p. 161–165.

[SEC 98] P. SECCHI. « A symmetric positive system with nonuniformly characteristic boundary ». In : *Diff. Int. Eq.* 11 (1998), p. 605–621.

[SEL 11] S.C. SELVADURAY et H. FUJITA YASHIMA. « Equazioni del mote dell'aria e transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido ». In : *Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V* 35 (2011), p. 37–69.

[SER 59] J. SERRIN. « Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics ». In : *Vol. VIII/1 of Encyclopedia of Physics.* Springer-Verlag, Berlin, 1959.

[STE 67] J. C. STEWART. « Some topics in radiative transfer ». In : *Developments in Transport Theory.* Academic press London et New York, 1967, p. 113–147.

[ZWE 67] P. F. ZWEIFEL. « Neutron transport theory ». In : *Developments in Transport Theory.* Academic press London et New York, 1967, p. 73–111.

Activités de recherche

PUBLICATIONS INTERNATIONALES

• I. Bazine, D. Ascoli, H. Fujita Yashima : *Estimation dans* W^1_∞ *de la solution de l'équation de transport avec une condition d'entrée et application à un modèle pour l'atmosphère avec la transition de phase de l'eau* À apparaître sur *Rend. Semi. Mat. Univ. Poli. Torino.*

• I. Bazine, H. Fujita Yashima : *Affaiblissement de la condition pour l'estimation dans* W^1_∞ *de la solution de l'équation de transport avec l'entrée.* En préparation.

COMMUNICATIONS INTERNATIONALES

• *Étude d'une équation de transport avec données peu régulières,* 5e Workshop International sur les Mathématiques Appliquées et la Modélisation (WIMAM'2015), Université 08 Mai 1945 Guelma, 25 et 26 Octobre 2015.

• *Équation de transport avec une condition d'entrée et application à la modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques,* 2e Workshop Algéro-Français EDP et

applications, Tlemcen, 30 Avril-03 Mai 2017.

• *Study of a transport equation with a boundary condition in a variable inflow part* The 9th Panafrican Congress of Mathematicians (PACOM'2017) Rabat - Morocco, July 03 – 07, 2017.

COMMUNICATIONS NATIONALES

• *Estimation L^{∞} du gradient de la solution de l'équation de transport avec la condition d'entrée*, La 8e École sur le Équations Différentielles Abstraites (EDA'08), Bejaïa, 17-21 Mai 2015.

• *Quelques estimations de la solution d'une équation de transport avec la condition d'entrée*, La 5e journée thésards en mathématiques, Université 8 Mai 1945 Guelma, 11 Juin 2015.

• *Estimation W^{1}_{∞} de l'équation de transport avec une donnée au bord et application à un modèle pour l'atmosphère*, 1re édition des Doctoriales Nationales de Mathématiques, E.N.S. Assia Djabar-Constantine, 28-31 octobre 2017.